



ПІВДЕННЕ

Державне підприємство
"Конструкторське бюро "Південне" ім. М.К. Янгеля"

Ймовірнісний підхід до розв'язання задач проектування систем РКТ

Навчально-методичний посібник для аспірантів
спеціальність «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» (код 134)

Підготував:
головний науковий співробітник
ДП «КБ «Південне»,
д.т.н. Гладкий Е.Г.

Дніпро
2022

Анотація

Мета курсу полягає в тому, щоб аспіранти (здобувачі) отримали необхідні знання та навички для постановки задач та проведення власних досліджень.

Всі процеси, що відбуваються в природі та техніці мають випадковий характер і це в багатьох випадках потрібно враховувати. Зазвичай дослідники спираються на відомі, традиційні моделі. В багатьох випадках це виправдано, проте в певних ситуаціях виникає потреба в їх модернізації або заміні. В курсі викладаються питання, які дозволяють вийти за рамки традиційних моделей.

Зазвичай випадковість в процесі проектування ототожнюється з надійністю і це дуже важливе питання з точки зору проектування – визначення і забезпечення надійності. Отже значна кількість моделей пов'язана саме с надійністю. Важливість цього полягає в тому, що прийоми та методи, які використовуються для визначення надійності, наприклад метод лінеаризації, метод Монте-Карло можуть бути використані і в інших задачах. Матеріал окремих розділів є поглибленим повторенням окремих тем, що викладалися в університетському курсі надійності літальних апаратів. Частина матеріалу нова, але пов'язана з основним питанням визначення надійності і повинна дати підґрунтя для власних роздумів аспірантів. Так, в своїх моделях для опису випадкових змінних дослідники використовують нормальний розподіл і не виходячи за одновимірний випадок. Але в багатьох випадках дослідник стикається з відмінністю поведінки випадкових величин від нормального випадку. Матеріал курсу дає альтернативу нормальному розподілу, зокрема і для багатовимірного випадку. Показано яким чином досліджувати відмінні від нормального стохастичні зв'язки між випадковими величинами з використанням простої міри.

Як уже відмічалось всі процеси, що відбуваються в технічних системах мають імовірнісний характер, проте здебільшого всі моделі, які використовують проєктанти і конструктора є детермінованими. Випадковість в них «приховується» в номіналах, граничних значеннях і коефіцієнтах безпеки. Розглянута сутність коефіцієнтів безпеки та їх вплив на надійність.

Окремо висвітлено питання імовірнісного оптимального проектування, що може бути використано при розробці конкретних конструкцій і проведенні досліджень.

Слухачі повинні мати знання з наступних курсів: «Теорії ймовірностей і математичної статистики», «Теорії надійності ЛА», «Проектування РН», «Конструювання РН».

Виражаю глибоку вдячність моїй колезі Сокіл Інні Володимирівні за неоціненну допомогу під час складання цього навчально-методичного посібника.

Тема 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Найбільш загальним поняттям, що характеризує технічну систему, зокрема космічний ракетний комплекс (КРК), ракету космічного призначення/ракету-носій (РКП/РН), космічний апарат (КА), є якість - сукупність властивостей, які визначають придатність використання системи за призначенням. Зазвичай, якість таких складних технічних систем як КРК, РКП/РН визначається певною кількістю параметрів, таких як ефективність, надійність, економічність та інш. Одним із основних показників якості технічної системи (ТС) в цьому переліку є надійність.

Під **надійністю** розуміється здатність технічної системи за рахунок внутрішніх властивостей забезпечувати виконання вимог, висунутих до неї протягом заданого часу і в заданих умовах експлуатації. Іншими словами, надійність – це якість системи, розгорнута у часі та у зовнішньому середовищі.

Сутність поняття надійності можна дати на прикладі РКП/РН наступним чином. В процесі польоту окремі РКП/РН можуть втратити працездатність і не виконати свого функціонального призначення. Це пов'язано із різноманітними причинами випадкового характеру. При цьому заздалегідь неможливо встановити, матиме місце порушення працездатності чи ні, тим більше не можна передбачити точно час появи такої події. Проте випадкове в одиничному набуває характеру закономірного загалом.

Таким чином, для сукупності всіх РКП/РН даної конструкції, виготовлених у одних і тих же умовах виробництва, можна гарантувати в середньому успішне виконання завдання лише з деякою впевненістю. Надійність якраз і є об'єктивною мірою впевненості у збереженні працездатності, властивості, що властива в середньому всій сукупності РКП/РН, однакових за конструкцією.

Кількісно показники надійності виражаються у вигляді певного числа, що визначається шляхом розрахунків. Кількісна міра надійності необхідна, по-перше, для забезпечення необхідного рівня надійності (тобто для цілей проектування системи з необхідним рівнем надійності, досягнення цього рівня в процесі експериментального відпрацювання), і, по-друге, для планування обсягу виготовлення готової продукції.

Для складних ТС надійність є комплексним поняттям, яке охоплює показники безвідмовності, ремонтпридатності, довговічності, збережуваності, готовності.

Вибір показників надійності для ТС визначається характером її функціонування.

1) Найбільш простою є схема функціонування (рис. 1.1), коли в деякий момент часу t_n (початок) технічна система задіюється в роботу (вмикається), а в момент часу $t_г$ відбувається відмова і ТС виключається із розгляду або система працює до моменту припинення роботи $t_з$ (закінчення)

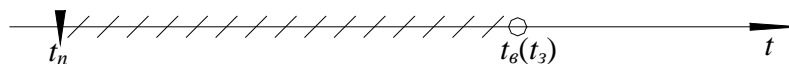


Рисунок 1.1 – Схема функціонування ТС, яку описують показником безвідмовності

2) Складнішою є наступна схема функціонування (рис. 1.2), коли в момент часу t_n ТС задіюється в роботу, далі в процесі роботи відбувається відмова (момент часу $t_г$) і пристрій надходить у ремонт та відновлюється протягом часу τ_p . Після закінчення відновлення ТС знову задіюється у роботу. Процес з відновленням може багато разів повторюватися.

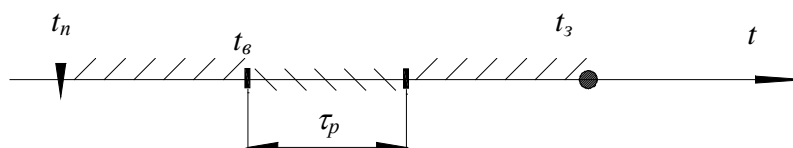


Рисунок 1.2 – Схема функціонування ТС, яку описують показником безвідмовності і ремонтпридатності (ТС, що відновлюються шляхом ремонту)

3) Найбільш загальною є схема роботи ТС, коли у певні періоди вона може перебувати в режимі очікування (інтервали $\tau_{оч}$). При цьому в процесі очікування можливе проведення регламентів ТС та усунення виявлених несправностей. В процесі задіяння і роботи ТС можливі відмови і відновлення шляхом проведення ремонту.

Отже, всі існуючі ТС можуть бути описані у сенсі надійності однією з трьох наведених схем. Вочевидь, перший тип ТС описується лише показниками безвідмовності. Для другого типу систем на додаток до показників безвідмовності потрібно використання показника ремонтпридатності. Для останньої схеми функціонування під час аналізу надійності до складу перелічених показників необхідно включити показник готовності. При цьому, якщо періоди очікування досить тривалі, необхідно використовувати показники збережуваності. У разі, якщо загальна тривалість роботи ТС дуже велика (досягає граничного стану), то для опису надійності систем типу 2 і 3 (за необхідності типу 1) слід використовувати показники довговічності.

Етап застосування РКП/РН характеризується малою тривалістю функціонування, неможливістю ремонту та відновлення працездатності систем та агрегатів у польоті. У разі відмови РКП/РН припиняє роботу. Таким чином, для аналізу надійності РКП/РН на етапі застосування необхідно використовувати першу схему функціонування та показники безвідмовності. Етап підготовки РКП/РН до пуску у складі КРК відповідає другій схемі функціонування, оскільки з'являється можливість відновлення окремих агрегатів, систем РКП/РН і наземного комплексу, що відмовили. Якщо враховується тривале зберігання РКП/РН, для опису надійності РКП/РН необхідно використовувати показники збережуваності. Для систем наземного комплексу потрібно використовувати показники довговічності. Для бойових ракет, які тривалий час перебувають на бойовому чергуванні, експлуатацію найповніше характеризує третю схему функціонування, для них треба розглянути показники готовності. Для КА, враховуючи особливості їхнього функціонування необхідно використовувати показники довговічності.

Забезпечення надійності ТС є дуже складним процесом, який триває протягом усього життєвого циклу. Прийнято вважати, що надійність закладається при проектуванні, доводиться до необхідного значення та підтверджується в ході експериментального відпрацювання, реалізується у виробництві, підтримується на необхідному рівні в період експлуатації.

Принциповим є етап проектування та експериментального відпрацювання, де відбувається встановлення потрібних значень показників надійності для системи в цілому та розподіл на складові частини нижніх рівнів, побудова розрахункових моделей оцінювання надійності, доведення надійності до потрібного рівня.

Основні поняття теорії надійності.

Основним поняттям в теорії надійності є поняття **відмови**. Технічна система може перебувати у двох станах: працездатному й непрацездатному (стані відмови). Працездатним називається такий стан ТС, при якому вона в даний момент відповідає всім основним і другорядним вимогам. Під основними вимогами розуміються вимоги, які визначають функціональні ознаки та призначення ТС. Інші вимоги та характеристики (такі як, зовнішній вигляд, зручність експлуатації тощо) називаються другорядними. Перехід з першого стану в другий, тобто повна або часткова втрата працездатності називається відмовою. Відмова – це стан повної чи часткової втрати працездатності, тобто

втрата ТС стану відповідності всім або частини вимог, встановлених щодо основних параметрів, які характеризують нормальне виконання заданих функцій.

Основним показником безвідмовності є імовірність безвідмовної роботи (ІБР) – ймовірність того, що відмова станеться пізніше певного заданого часу t

$$IBP = \Pr\{T > t\} = P(t),$$

де T – випадкова величина часу виникнення відмови; t – деякий заданий час, протягом якого необхідно визначити ІБР. Функція є незростаючою, при цьому $P(t=0) = 1, P(t \rightarrow \infty) = 0$.

Зворотна подія, яка полягає в тому, що відмова трапиться до заданого часу, визначає ймовірність відмови $Q(t) = \Pr\{T \leq t\}$. Вона може розглядатися як інтегральна функція розподілу випадкової величини часу виникнення відмов, а отже, похідна $q(t) = Q'(t)$ представляє густину розподілу часу виникнення відмов. Оскільки безвідмовний стан та відмова - протилежні випадкові події, що утворюють повну групу подій, то

$$P(t) + Q(t) = 1 \text{ і } P'(t) = -Q'(t).$$

В теорії надійності систем визначають наступні окремі показники безвідмовності:

- інтенсивність відмов (умовна густина ймовірності відмови, тобто густина ймовірності відмови, обчислена за умови, що до моменту часу t елемент не відмовив)

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (1.1)$$

- середній наробіток на відмову (середній час безвідмовної роботи), який виходить за визначенням математичного сподівання

$$\bar{T} = M[T] = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

З виразу (1.1) виходить диференціальне рівняння зі змінними, що розділяються, інтегрування якого дає важливу для практики залежність між ІБР та інтенсивністю відмов

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^{\infty} \lambda(t) dt\right).$$

Для практичних розрахунків надійності найбільш важливим є період нормальної роботи ТС, для якого характерна приблизна сталість інтенсивності відмов, а отже, справедливий експоненційний закон розподілу часу безвідмовної роботи

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (1.2)$$

Він є основною розрахунковою залежністю для випадку раптових відмов

Для (1.2) виходить просте співвідношення, що пов'язує середній наробіток на відмову (\bar{T}) та інтенсивність відмов

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.3)$$

З останньої формули випливає простий фізичний сенс інтенсивність відмов, яка становить середню кількість відмов, що відбуваються в одиницю часу.

Основним показником ремонтпридатності є імовірність відновлення у заданий час – ймовірність того, що час відновлення працездатного стану не перевищить заданого часу. Для визначення цього показника розглядається поняття часу відновлення (ремонту) - T_p - це час, витрачений на виявлення, пошук причин відмови та її усунення. Час відновлення T_p є випадковою величиною і залежить від цілої низки факторів: характеру відмови, пристосованості ТС до швидкого виявлення відмови, кваліфікації персоналу, що здійснює відновлення, наявності технічних засобів для проведення ремонту та ін. Показник ремонтпридатності визначається в такий спосіб

$$G(\tau) = \Pr\{T_p < \tau\},$$

де τ – заданий час на відновлення.

Для показника ремонтпридатності маємо $G(\tau = 0) = 0$, $G(\tau \rightarrow \infty) = 1$.

Якщо $g(\tau_p)$ – густина часу відновлення (ремонту) ТС, то показник ремонтпридатності визначається наступним чином

$$G(\tau) = \int_0^{\tau} g(\tau_p) d\tau_p.$$

Окремі показники. Інтенсивність відновлення – це імовірність того, що ТС буде відновлено в момент часу τ , за умови, що до цього моменту часу відновлення не було завершено

$$\mu(\tau) = \frac{g(\tau)}{1 - G(\tau)}.$$

Шляхом інтегрування співвідношення отримуємо формулу зв'язку загального показника ремонтпридатності та інтенсивності відновлення

$$G(\tau) = 1 - \exp\left[-\int_0^{\tau} \mu(t) dt\right].$$

За умови $\mu = \text{const}$, маємо просте співвідношення

$$G(\tau) = 1 - e^{-\mu\tau}. \quad (1.4)$$

Середній час відновлення (\bar{T}_p) – це математичне сподівання часу відновлення працездатного стану ТС після відмови. Він визначається в такий спосіб

$$\bar{T}_p = \int_0^{\infty} \tau_p \cdot g(\tau_p) d\tau_p.$$

За умови $\mu = \text{const}$ маємо

$$g(\tau) = G'(\tau) = \mu e^{-\mu\tau};$$

$$\bar{T}_p = \frac{1}{\mu}. \quad (1.5)$$

Тема 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ РКТ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ НА ЕТАПАХ ПРОЕКТУВАННЯ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВІДПРАЦЮВАННЯ

Розглянемо математичні моделі розрахунку надійності для різних ракетно-космічних систем.

2.1 Визначення надійності механічних систем РКП/РН на етапі проектування

РКП/РН є складною динамічною системою одноразового використання малої тривалості основного застосування. У процесі польоту на борту РКП/РН відбуваються найрізноманітніші фізико-механічні процеси. Усі системи, що входять до складу РКП/РН, можна поділити на механічні та радіоелектронні. Такий поділ виглядає дещо умовним, оскільки багато підсистем РКП/РН являють собою комбінацію зазначених типів систем. Наприклад, рушійна установка, загалом, є досить складною механічною системою, проте вона включає певну сукупність елементів автоматики, що являють радіотехнічні системи.

Механічні системи (МС) займають домінуюче положення у структурі систем РКП/РН і вирішальним чином впливають на її масу та надійність. До МС відносять систему живлення, що включає паливні ємності, трубопроводи, систему наддуву; «сухі» відсіки; рушійну установку, системи скидання та поділу. Надійність МС переважно визначається формою конструкції, геометричними та топологічними параметрами, фізико-механічними характеристиками матеріалів. Дублювання як засіб підвищення надійності у таких системах практично не використовується.

Деталізація МС на елементи у певних випадках може бути ускладнена і неможлива, що може бути обумовлено єдністю конструктивно-силової схеми, пневмогідравлічних трактів, технологічних прийомів збирання тощо. Це може призводити до певних складнощів під час декомпозиції МС на складові та використання для оцінки надійності методу структурних схем. Наприклад, якщо для бака окисника РКП/РН з приєднанням до нього магістральним трубопроводом (рисунок 2.1) можна використовувати наступну ССН (рисунок 2.2).

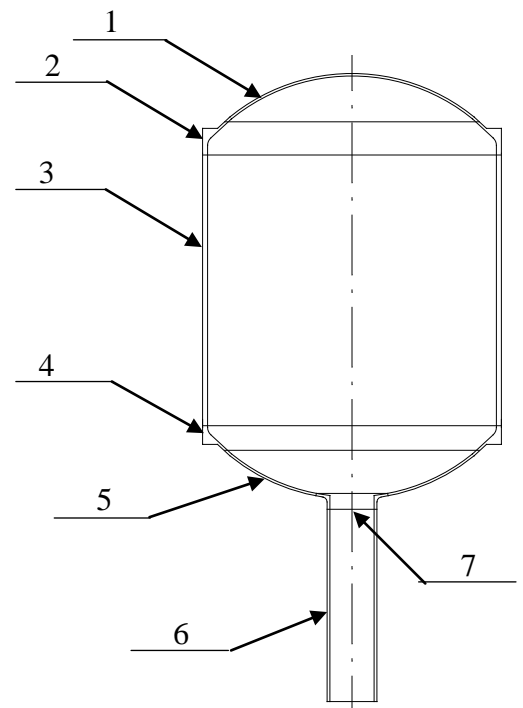


Рисунок 2.1. Бак окисника РН: 1 – верхнє днище; 2 – верхній торцьовий шпангоут; 3 – циліндрична оболонка; 4 – нижній торцьовий шпангоут; 5 – нижнє днище; 6 – магістральний трубопровід; 7 - зварювальні шви

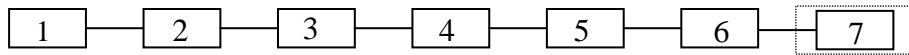


Рисунок 2.2 – Структурна схема надійності бака

Проте якщо в наведеній МС циліндрична оболонка є вафельною, розглянути окремо роботу елементів вафлі неможливо. Аналогічно провести розбивку на складові (стрингери, шпангоути, оболонку) «сухий» відсік РКП/РН проблематично, зважаючи на єдність конструктивно-силової схеми.

У практичній більшості випадків показник безвідмовності МС може бути визначений двома складовими: структурною надійністю ($P_{стр}$) і параметричною надійністю ($P_{пар}$)

$$P = P_{стр} P_{пар}.$$

Структурна надійність – це надійність складових частин МС, що розглядаються (в разі якщо проведено її декомпозицію). Параметрична складова – це ймовірність виконання певних вимог до МС в цілому. Треба зауважити, що надійність складових частин МС також може виходити із виконання певних вимог, тобто вона може бути зведена до параметричної надійності окремої складової частини.

Підсистеми та елементи, що входять до складу МС, можуть мати різний характер функціонування (одноразового спрацьовування, циклічного спрацьовування, безперервної роботи). Відповідно до цих особливостей можуть застосовуватися різні підходи до визначення їх кількісних характеристик надійності, тобто $P_{стр}$.

Для проектного розрахунку надійності елементів (складових $P_{стр}$) та вузлів безперервного функціонування МС, наробіток яких обчислюється в одиницях часу (фланцеві з'єднання трубопроводів, елементи кріплення та інш.), циклічного функціонування, наробіток яких виражається числом циклів спрацьовування (електропневмоклапани та інш.) може бути використаний метод λ характеристик (використовується інтенсивність відмов). Для цього за принциповою схемою системи та технічним описом процесу її функціонування визначається наробіток елементів безперервної τ_k та циклічної дії N_k (кількість циклів від моменту включення до відмови). Далі визначаються значення інтенсивностей відмов елементів безперервного λ_k та циклічного функціонування λ_N та коригуються, якщо є дані щодо умов роботи елементів (температури, навантаження тощо). У підсумку ІБР елементів безперервного та циклічного функціонування відповідно можна визначити так

$$P = e^{-\lambda_k \tau_k},$$

$$P = e^{-\lambda_N \tau_N}.$$

Для окремих елементів і складових МС та для МС в цілому (складова $P_{пар}$) поняття відмови визначається як невиконання певних вимог (умов), що визначаються фізичними та технічними особливостями. Кожна умова працездатності характеризує певний вид потенційно можливих відмов (втрата міцності, втрата стійкості, негерметичність, неприпустимі пластичні або пружні деформації елементів конструкції, заклинювання елементів при взаємному переміщенні, неспрацьовування механічних частин клапанів, нерозкриття стиків, вихід параметрів за допуск, тощо). Найчастіше умови працездатності мають добре вивчену фізичну природу і піддаються простому аналітичному опису.

У загальному випадку збереження працездатного стану МС записується у вигляді системи умов працездатності, формалізованих наступним чином

$$Z_j(\bar{\xi}, t) = \varphi_j(X_1(\bar{\xi}, t), \dots, X_n(\bar{\xi}, t)) > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

де $\varphi_j(\bullet)$ – функції працездатності (ФП) відповідно, $X_i(\bullet)$ – первинні змінні (ПЗ), що характеризують стан МС. Невиконання хоча б однієї з умов (2.1) спричиняє відмову всієї системи в цілому.

Для визначення працездатного стану можна розглядати поведінку найважливіших фізичних параметрів ТС, які визначають якість її функціонування. Вихід таких параметрів стану за певні допустимі межі означає порушення працездатності (відмову). З фізичних міркувань обмеження параметра стану може бути не тільки одностороннім (обмеження або тільки зверху або тільки знизу) можливе і двостороннє обмеження параметра стану. Наприклад, тиск наддування в баку повинен бути не нижчим від необхідного за умов безкавітаційної роботи насоса і не вище тиску руйнування бака. Як у першому випадку так і у другому умови працездатності також може бути зведено до формалізованої форми з нулем у правій частині.

Виходячи з цього, як кількісна характеристика надійності приймається ймовірність одночасного виконання всіх умов системи - ймовірність безвідмовної роботи (ІБР)

$$P = \Pr\{Z_j(\bar{\xi}, t) = \varphi_j(X_1(\bar{\xi}, t), \dots, X_n(\bar{\xi}, t)) > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad 0 \leq t \leq T\}. \quad (2.2)$$

Власне параметрична надійність являє собою ймовірність того, що за час функціонування системи T параметри стану не виходять за допустимі межі (у нашому випадку не вийдуть у негативну область).

У найбільш загальному випадку $Z_j(\bar{\xi}, t)$, $X_i(\bar{\xi}, t)$ залежать від багатовимірної координати $\bar{\xi}$ і часу t і є дійсними випадковими полями. У такій постановці задача визначення показника надійності (2.2) є дуже складною. У практичних розрахунках обмежуються системою умов працездатності, записаною для фіксованого перерізу (точки) МС $\bar{\xi}_0$ з найнебезпечнішими умовами функціонування. У таких моделях для опису ПЗ та ЗС використовуються випадкові процеси

$$Z_i(t) = \varphi_i(X_1(t), \dots, X_n(t) | 0 \leq t \leq T) > 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.3)$$

Геометрична інтерпретація задачі визначення параметричної надійності як ймовірності відсутності викидів випадкової функції параметра стану за нульовий рівень протягом часу функціонування T (2.3) показана на рис. 2.3. Для наочності показано густину розподілу реалізації функції $Z(t)$ у фіксованому перерізі t_j та математичне сподівання $m_z(t)$. У цьому випадку методика розрахунку ІБР найчастіше ґрунтується на теорії викидів випадкових функцій.

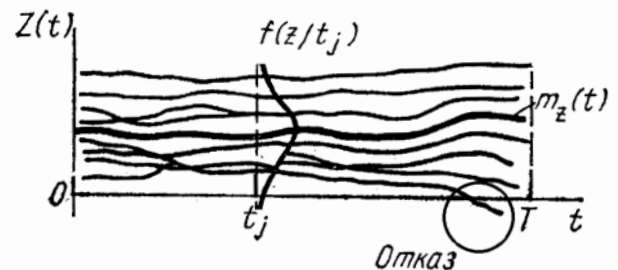


Рисунок 2.3 - Випадковий процес для однієї ЗС

При проведенні практичних розрахунків проектних оцінок параметричної надійності досить часто умови працездатності розглядаються не для всього часу

функціонування, а лише для певного фіксованого моменту часу t_0 , який характеризується мінімальними можливостями в частині міцності та максимальним діючим навантаженням. Таким чином ПЗ та ЗС розглядаються як випадкові величини, а отже умова працездатності записується у вигляді

$$Z_j = \varphi_j(X_1, \dots, X_n) > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Показник безвідмовності в цьому випадку визначається як

$$P = \Pr(Z_j = \varphi_j(\bar{X}) > 0, \quad j = \overline{1, m}). \quad (2.5)$$

Ця модель фактично є основною при проведенні проектних розрахунків ІБР МС.

Для двох змінних стану, які не залежать від часу, можна дати наочну геометричну інтерпретацію параметричної надійності (рис. 2.4). Кожній парі значень параметрів стану Z_1 і Z_2 відповідає деяка точка на площині Z_1OZ_2 . Якщо вона перебуває в першій чверті, то це відповідає працездатному стану. В протилежному випадку, якщо точка виявиться поза зазначеною ділянкою, то це означає відмову. Параметрична надійність кількісно дорівнює об'єму фігури, обмеженою поверхнею густини спільного розподілу параметрів Z_1 та Z_2 $f(z_1, z_2)$ і площиною Z_1OZ_2 , що обмежена першою чвертю (область працездатного стану).

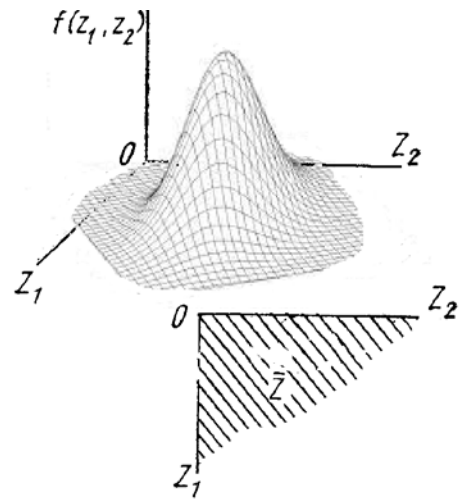


Рисунок 2.4 – Геометрична інтерпретація параметричної надійності для двох умоа працездатності

Ще більш просто інтерпретується ІБР, коли маємо одну ЗС, що не залежить від часу (рис. 2.5): параметрична надійність визначається площею під кривою густини розподілу ЗС в межах $[0, \infty)$.

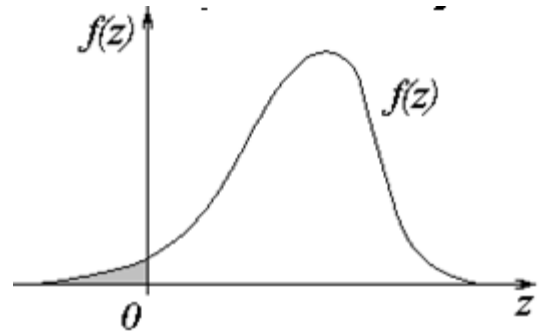


Рисунок 2.5 – Визначення ІБР для однієї ЗС, що є випадковою величиною

В загальному випадку значення ІБР МС відповідно до (2.5) визначається шляхом інтегрування

$$P = \int_{\varphi(\bar{X}) > 0} \dots \int f(\bar{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (2.6)$$

або

$$P = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g(\bar{z}) dz_1 \dots dz_m, \quad (2.7)$$

де $f(\bar{x})$, $g(\bar{z})$ – відповідно функції сумісної густини розподілу ПЗ та ЗС.

У практичній більшості випадків розрахунок ІБР з використанням формул (2.6), (2.7) провести неможливо через відсутність достовірної інформації про спільні закони розподілів ПЗ $f(\bar{x})$ та ЗС - $g(\bar{z})$. Тому розроблено низку наближених методів і прийомів, що зменшують труднощі

застосування зазначеного методу на практиці. Більшість їх розроблено для обчислення ймовірності (2.7), оскільки інтеграл у цьому випадку виявляється меншою кратності.

Один із шляхів наближеного знаходження ІБР [14,15] заснований на представленні ФП рядами Тейлора, усіченими до деякого порядку s . Як точка розкладання використовуються значення математичних сподівань ПП $\bar{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Розклад для ФП $\varphi_j(\bar{X})$ має вигляд

$$T_j(\bar{X}) = \varphi_j(\bar{m}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial m_i} (X_i - m_{X_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^{(2)} \varphi_j}{\partial m_{i_1} \partial m_{i_2}} (X_{i_1} - m_{i_1})(X_{i_2} - m_{i_2}) + \dots,$$

де $\frac{\partial \varphi_j}{\partial m_i}, \frac{\partial^{(2)} \varphi_j}{\partial m_{i_1} \partial m_{i_2}}$ – значення похідних $\varphi_j(\bar{X})$, які обчислено у точці \bar{m} .

Розкладання Тейлора, не володіючи високими точністними властивостями, автоматично здійснює операцію центрування випадкових змінних, яка необхідна для визначення числових характеристик функцій випадкових аргументів. Це дозволяє звести метод на основі такого розкладання до певної універсальної процедури. Схематично ідея такого підходу побудови $g^*(\bar{z})$ та його зв'язок з точними методами представлена на рис. 2.6).

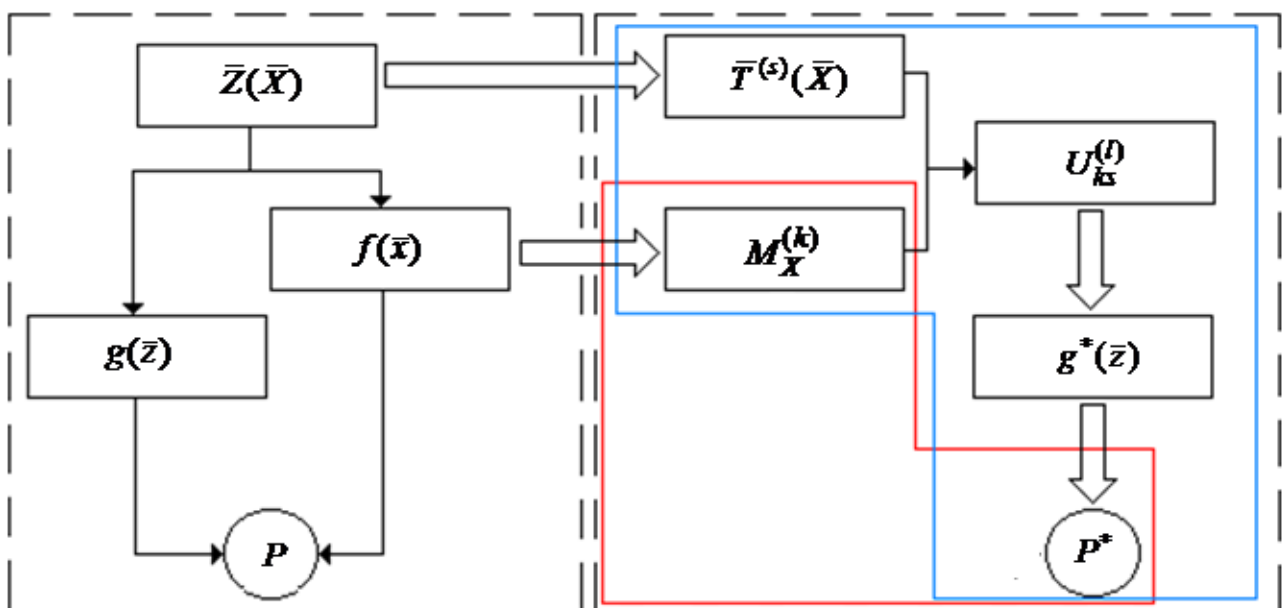


Рисунок 2.6 – Схема наближеного способу визначення ІБР

Інтегрування виразів, що містять $T_j(\bar{X})$, обчислюються числові характеристики ЗС до деякого необхідного порядку (l), які обмежується маргінальними та характеристиками парної взаємодії (на рисунку 2.6 це множина $U_{ks}^{(l)}$). Загальні вирази для них мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{Z_j} = \int_{-\infty}^{\infty} (n) \int_{-\infty}^{\infty} T_j^{(s)}(\bar{X}) f(\bar{X}) d\bar{x}, \quad j = \overline{1, m} \\ \mu_{Z_j}^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} (n) \int_{-\infty}^{\infty} \left(T_j^{(s)}(\bar{X}) - m_{Z_j} \right)^r f(\bar{X}) d\bar{x}, \quad j = \overline{1, m}, \quad r \leq l \\ \mu_{Z_{j_1} Z_{j_2}}^{(r_1, r_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} (n) \int_{-\infty}^{\infty} \left(T_{j_1}^{(s)}(\bar{X}) - m_{Z_{j_1}} \right)^{r_1} \left(T_{j_2}^{(s)}(\bar{X}) - m_{Z_{j_2}} \right)^{r_2} f(\bar{X}) d\bar{x}, \quad r_1 + r_2 \leq l \\ \dots \end{array} \right. , \quad (2.8)$$

$T_{j_1}^{(s)}(\bar{X}), T_{j_2}^{(s)}(\bar{X})$ – багаточлени Тейлора, що наближають ФП $\varphi_{j_1}(\bar{X}), \varphi_{j_2}(\bar{X})$ відповідно. Розкриття підінтегральних виразів (2.8) та подальше інтегрування призводить до виразів, які у явному вигляді пов'язують числові характеристики ЗС та ПЗ.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{Z_j} = m_{Z_j} \left(M_X^{(k)} \right), \quad j = \overline{1, m} \\ \mu_{Z_j}^{(r)} = \mu_{Z_j}^{(r)} \left(M_X^{(k)} \right), \quad r \leq l \\ \mu_{Z_{j_1} Z_{j_2}}^{(r_1, r_2)} = \mu_{Z_{j_1} Z_{j_2}}^{(r_1, r_2)} \left(M_X^{(k)} \right), \quad r_1 + r_2 \leq l \end{array} \right. ,$$

де $M_X^{(k)}$ – множина числових характеристик густини розподілу ПЗ обмежених певним порядком k . Таким чином, числові характеристики ЗС виявляються деякими функціями числових характеристик ПЗ, що є важливим. Далі з використанням множини числових характеристик ЗС будується апроксимуючий розподіл $g^*(\bar{z})$ та визначається ІБР згідно (2.7).

Залежно від порядку розкладання ФП – s і використовуваних порядків числових характеристик ПЗ і ЗС розглядають кілька моделей визначення ІБР. Найбільш простою є модель [2,12,19], в якій функція працездатності представляється рядом Тейлора із збереженням членів першого порядку (метод лінеаризації). Зазвичай для такої моделі (подібна модель носити назву нормальної або лінійної) первинні змінні, що входять до ФП, та змінні стани вважаються нормальними, а використовувані числові характеристики ПЗ та ЗС обмежуються другим порядком. Вирази для визначення числових характеристик ЗС мають вигляд:

– для математичного сподівання

$$m_{Z_k} = \varphi(\bar{m}); \quad (2.9)$$

– для середнього квадратичного відхилення в загальному випадку корельованих ПЗ

$$\sigma_{Z_k}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right) \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \right) \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}^{(1,1)}. \quad (2.10)$$

Для незалежних ПЗ формула (2.10) спрощується

$$\sigma_{Z_k}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right)^2 \sigma_i^2. \quad (2.11)$$

В разі, коли ЗС є корельованими, коваріаційний момент між ЗС визначається як

$$K_{Z_k, Z_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}^{(1,1)}.$$

Більш складною і точнішою є квадратична та кубічна моделі, для яких у розкладанні Тейлора ФП присутні члени другого та третього порядків. Для таких моделей потрібні числові характеристики ПЗ вищих ($k > 2$) порядків, що характеризують відміну розподілу від нормального (дивись тему 4). Відповідні формули для розрахунку центральних моментів і числових характеристик (маргінальних та парних) для ВВ Z_k и Z_l для кубічної моделі наведено нижче (числові характеристики ПЗ і ЗС обмежено 4-тим порядком) [16]

$$\begin{aligned} m_{Z_k} &= \varphi_k(\bar{m}) + h_k^{(1)}; \\ \sigma_{Z_k} &= \sqrt{\mu_{Z_k}^{(2)}}; \\ \beta_{1Z_k} &= \frac{\mu_{Z_k}^{(3)}}{\sigma_{Z_k}^3}; \\ \beta_{2Z_k} &= \frac{\mu_{Z_k}^{(4)}}{\sigma_{Z_k}^4} - 3; \\ \rho_{Z_k Z_l}^{(i,j)} &= \frac{\mu_{Z_k Z_l}^{(i,j)}}{\sigma_{Z_k}^i \sigma_{Z_l}^j}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{Z_k}^{(2)} &= h_k^{(2)} + (h_k^{(1)})^2 \\ \mu_{Z_k}^{(3)} &= h_k^{(3)} - 3h_k^{(2)}h_k^{(1)} + 2(h_k^{(1)})^3 \\ \mu_{Z_k}^{(4)} &= h_k^{(4)} - 4h_k^{(3)}h_k^{(1)} + 6h_k^{(2)}(h_k^{(1)})^2 - 3(h_k^{(1)})^4 \\ \mu_{Z_k Z_l}^{(1,1)} &= h_{kl}^{(1,1)} - h_k^{(1)}h_l^{(1)} \\ \mu_{Z_k Z_l}^{(1,2)} &= h_{kl}^{(1,2)} - 2h_{kl}^{(1,1)}h_l^{(1)} - h_k^{(1)}h_l^{(2)} + 2h_k^{(1)}(h_l^{(1)})^2 \\ \mu_{Z_k Z_l}^{(1,3)} &= h_{kl}^{(1,3)} - 3h_{kl}^{(1,2)}h_l^{(1)} + 3h_{kl}^{(1,1)}(h_l^{(1)})^2 - h_k^{(1)} \left[h_l^{(3)} - 3h_l^{(1)}h_l^{(2)} + 3(h_l^{(1)})^3 \right] \\ \mu_{Z_k Z_l}^{(2,2)} &= h_{kl}^{(2,2)} - 2 \left[h_{kl}^{(2,1)}h_l^{(1)} + h_{kl}^{(1,2)}h_k^{(1)} \right] + h_k^{(2)}(h_l^{(1)})^2 + h_l^{(2)}(h_k^{(1)})^2 + \\ &\quad + 4h_{kl}^{(1,1)}h_k^{(1)}h_l^{(1)} - 3(h_k^{(1)})^2(h_l^{(1)})^2; \\ h_k^{(1)} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \mu_{X_i}^{(2)} + \frac{1}{6} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i^3} \mu_{X_i}^{(3)} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \mu_{X_i X_j}^{(1,1)} + \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j^2} \mu_{X_i X_j}^{(1,2)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_k^{(2)} &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right)^2 \mu_{X_i}^{(2)} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \mu_{X_i}^{(3)} + \left(\frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i^3} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \right)^2 \right) \mu_{X_i}^{(4)} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \mu_{X_i X_j}^{(1,1)} + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} + 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,2)} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \right)^2 \right) \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_j^3} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j^2} + \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right]; \\
h_k^{(3)} &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right)^3 \mu_{X_i}^{(3)} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right)^2 \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \mu_{X_i}^{(4)} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[3 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \right)^2 \mu_{X_i X_j}^{(1,2)} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} + 3 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \right) \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + \right. \\
&+ \left. 3 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right]; \\
h_k^{(4)} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \right)^4 \mu_{X_i}^{(4)} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[3 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \right)^2 \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + 4 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \right)^3 \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right] \\
h_{kl}^{(1,1)} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \mu_{X_i}^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i^2} + \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i}^{(3)} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(3)} \varphi_l}{\partial m_i^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i^2} + \frac{1}{6} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i^3} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i}^{(4)} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \mu_{X_i X_j}^{(1,1)} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_j^2} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j} + \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,2)} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(3)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(3)} \varphi_l}{\partial m_j^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial^{(3)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_j^2} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_j^3} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(3)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{kl}^{(1,2)} = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right)^2 \mu_{X_i}^{(3)} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i}^{(4)} \right] + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} + 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,2)} + \right. \\
& + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j} + \frac{3}{2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right)^2 + \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \right) \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + \\
& + \left. \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_j^2} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_j^2} + 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \frac{\partial^{(2)} \varphi_l}{\partial m_i \partial m_j} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_j^2} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} + \frac{\partial^{(2)} \varphi_k}{\partial m_i \partial m_j} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \right)^2 \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right]; \\
h_{kl}^{(1,3)} = & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right)^3 \mu_{X_i}^{(4)} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[3 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right)^2 \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} + 3 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right]; \\
h_{kl}^{(2,2)} = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right)^2 \mu_{X_i}^{(4)} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \left(2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i X_j}^{(2,2)} + \right. \\
& + \left. 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \right) \mu_{X_i X_j}^{(1,3)} \right].
\end{aligned}$$

Для квадратичної моделі аналогічні формули можуть бути знайдено в [19].

Зазначений спосіб оцінки показника безвідмовності з розкладанням у ряд Тейлора, незважаючи на свою наближеність, має значну універсальність застосування і дозволяє алгоритмізувати процес обчислення ІБР для будь-якої системи умов працездатності.

Необхідно зауважити, що в інженерній практиці дуже часто використовується гіпотеза незалежності аргументів та функцій працездатності (дивись також [3]). Це фактично дозволяє замінювати кратні інтеграли на добуток одновимірних, що значно спрощує задачу

$$P = \Pr\{Z_1 > 0, Z_2 > 0, \dots, Z_m > 0\} = \prod_{i=1}^m \Pr\{Z_i > 0\}. \quad (2.12)$$

2.2 Модель «навантаження-несуча здатність»

У багатьох практичних випадках умови працездатності ТС формалізуються у вигляді двох складових: несучої здатності та навантаження, що діє на систему (модель «навантаження - несуча здатність»). Історично такий

спосіб представлення системи умов працездатності з'явився в числі перших при вирішенні задач визначення міцнісної надійності в будівельній механіці, а саме ймовірності того, що навантаження, що діє на конструкцію $S(\bar{X})$ не перевершить її несучої здатності $R(\bar{X})$. Перевагою такої форми подання ФП є наочність, що розкриває фізичну сутність явища відмови.

Несуча здатність і навантаження є функціями параметрів конструкції і зовнішнього середовища, які покладаються випадковими величинами. Система умов працездатності у межах моделі «навантаження – несуча здатність» записується наступним чином

$$R_j(\bar{X}) > S_j(\bar{X}), j = \overline{1, m}. \quad (2.13)$$

Відповідно ІБР визначається так

$$P = \Pr\{R_j(\bar{X}) > S_j(\bar{X}), j = \overline{1, m}\}. \quad (2.14)$$

Найбільш просто задача оцінювання ймовірності відсутності відмови розв'язується для незалежних та нормально розподілених ВВ несучої здатності R та навантаження S [9]

$$P = \Phi\left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right), \quad (2.15)$$

де $m_R, m_S, \sigma_R, \sigma_S$ – математичні сподівання та середні квадратичні відхилення несучої здатності та навантаження відповідно. Або для залежних R і S -

$$P = \Phi\left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S}}\right) \quad (2.16)$$

де ρ_{RS} – коефіцієнт лінійної кореляції між R і S .

З використанням методу лінеаризації значення математичних сподівань, середніх квадратичних відхилень випадкових величин R і S , а також коефіцієнт лінійної кореляції між ними може бути розраховано за формулами

$$m_R = R(\bar{m}), m_S = S(\bar{m}),$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial m_i}\right)^2 \sigma_i^2, \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial m_i}\right)^2 \sigma_i^2,$$

$$K_{RS} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial m_i}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial m_i}\right) \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial m_i}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial m_j}\right) \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \rho_{RS} = \frac{K_{RS}}{\sigma_R \sigma_S}.$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Яким чином визначаються числові характеристики (математичні сподівання та середні квадратичні відхилення) первинних змінних в розрахунках надійності?

2. Як визначити надійність для двох змінних стану Z_1 та Z_2 якщо $f(z_1, z_2)$ є двовимірний нормальний розподіл (дивись тему 4).

3. Для однієї умови працездатності, використовуючи метод лінеаризації і теореми о числових характеристиках, отримати вирази для m_z та σ_z (формули (2.9), (2.11)).

4. Отримати вираз для визначення параметричної надійності для однієї ЗС у випадку двостороннього обмеження.

5. Визначити ймовірності безвідмовної роботи міжступеневої ферми РН, що складається із N стрижнів трубчастого перерізу (вважати, що на працездатність ферми впливають лише стрижні ферми, які працюють незалежно; закінцівки, що забезпечують стикування ферми до суміжних відсіків в розрахунках надійності не враховувати). Кожен зі стрижнів навантажено осьювою стискаючою силою. Розглянути для стрижня:

- одну умову працездатності – загальну втрату стійкості за формулою Ейлера;
- дві умови працездатності – загальну втрату стійкості за формулою Ейлера та загальну втрату стійкості як оболонки;
- три умови працездатності – загальну втрату стійкості за формулою Ейлера; загальну втрату стійкості як оболонки; втрату міцності на стискання.

Для розрахунків використати загальну модель та модель «навантаження-несуча здатність».

2.3 Використання методу статистичного моделювання (метод Монте-Карло) для визначення надійності ракетно-космічних систем

Останнім часом при вирішенні великого кола задач широке застосування знаходить метод Монте-Карло (метод статистичних випробувань). З його допомогою моделюються процеси, що відбуваються в системах (симуляція). Розглянемо можливості цього методу на прикладі задач надійності.

2.3.1 Визначення параметричної надійності МС

Щодо оцінки параметричної надійності застосування методу Монте-Карло дозволяє виключити процедуру визначення інтегралів (2.6) та (2.7). Загальний алгоритм розв'язання задачі оцінювання надійності МС методом Монте-Карло має наступний вигляд. Насамперед, необхідно у відповідності до законів розподілів ПЗ отримати реалізації цих випадкових величин (випадкові проби вектора ПЗ):

$$\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\} \text{ для } i = \overline{1, N},$$

де N – загальна кількість випадкових спроб.

Кожну випадкову пробу підставляють у систему умов працездатності та визначаються значення кожної змінної стану $\{z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \dots, z_m^{(i)}\} (i = \overline{1, N})$. Далі відбувається аналіз отриманих значень ПС. З цією метою вводиться індикатор, значення якого для кожної ПС визначається так

$$I_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & z_j^{(i)} \leq 0 \\ 1, & z_j^{(i)} > 0 \end{cases}$$

Для системи умов працездатності в цілому також визначається індикатор

$$I_c^{(i)} = \prod_{j=1}^m I_j^{(i)}.$$

Його значення дорівнює одиниці, якщо всі елементи якогось рядка матриці дорівнюють одиниці (всі умови виконуються і такий стан для ТС є працездатним), в іншому випадку значення дорівнює нулю (відмова ТС). Таким чином, у результаті отримуємо вектор стовпець, що складається з нулів та одиниць.

Описаний загальний процес процесу визначення надійності методом Монте-Карло та перетворення системи умов працездатності виглядає наступним чином (рис. 2.7).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots, x_n^{(N)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_m^{(1)} \\ z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_m^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ z_1^{(N)}, z_2^{(N)}, \dots, z_m^{(N)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1, 1, \dots, 1 \\ 1, 0, \dots, 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1, 1, \dots, 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{array} \right\}$$

Рисунок 2.7 – Схема розрахунку ІБР методом статистичних випробувань.

Просумувавши всі індекси, що дорівнюють одиниці в останньому вектор-стовпці, отримуємо кількість успішних результатів функціонування МС M . Загальна кількість нулів дає кількість відмов системи D . У результаті надійність визначається за формулою

$$P^* = \frac{M}{N}. \quad (2.17)$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Визначити ІБР міжступеневої ферми РН в умовах задачі 5 попереднього підрозділу з використанням методу Монте-Карло.

2.3.2 Визначення надійності КА

Особливості КА з точки зору оцінки надійності:

1. КА - складна багатофункціональна система з широким спектром розв'язуваних задач, яка може працювати в різних режимах, що обумовлює складність визначення поняття відмови КА;
2. КА є не відновлюваними системами (неможливість ремонту на орбіті).
3. КА мають тривалий термін функціонування, що називається терміном активного існування

Однією з основних вимог, що висуваються до КА як до ТС, є вимога довговічності (один із показників надійності). Довговічність – це властивість ТС зберігати працездатний стан до настання граничного стану за встановленої системи технічного обслуговування та ремонту. Граничний стан – це стан об'єкта, у якому його подальша експлуатація недопустима чи недоцільна, або

відновлення його працездатного стану неможливо чи недоцільно. Ресурс T – це сумарний наробіток ТС від початку експлуатації до переходу в граничний стан. Оскільки ресурс є ВВ, то як показники довговічності використовують: середній ресурс та гама-відсотковий ресурс. Середній ресурс – математичне очікування ресурсу $\bar{T} = M[T]$ (середній термін активного існування для КА). Гама-відсотковий ресурс – це сумарний наробіток, протягом якого ТС не досягає граничного стану з імовірністю γ (гама-відсотковий термін активного існування для КА).

Оскільки ремонт КА на орбіті є проблематичним, фактично для космічного апарату ресурс тотожний наробітку до відмови. Таким чином, середній ресурс визначається виходячи з наступного співвідношення

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} P(t) dt, \quad (2.18)$$

де $P(t)$ – функція надійності системи.

Для визначення гама-відсоткового ресурсу необхідно розв'язати наступне рівняння

$$P(t_\gamma) = \gamma \quad (2.19)$$

відносно t_γ . Графічна інтерпретація знаходження гама-відсоткового ресурсу наведено на рис. 2.8.

Для визначення показників надійності КА основний метод це імітаційне моделювання.

Розглянемо задачу визначення терміну функціонування ТС без урахування її багатфункціональності (коли чітко визначене поняття відмови КА і побудована функція надійності $P(t)$) з використанням імітаційного моделювання.

Нехай у нас є структурна схема надійності (ССН) ТС, і відомі густини часу безвідмовного функціонування кожного окремого елемента. Процедура імітаційного моделювання часу роботи системи має наступний вигляд:

1. Генеруються моменти відмов (або тривалість функціонування) складових елементів (позначимо їх t_{i*}) відповідно до заданих законів розподілів.
2. Визначається час відмови системи в цілому, виходячи з часу безвідмовної роботи складових елементів та їх структурних зв'язків

$$T_{c*} = f(t_{1*}, t_{2*}, \dots, t_{n*}),$$

де n – кількість елементів у ССН.

Реалізація п. 1 та 2 дозволяє отримати одну реалізацію роботи ТС. Для отримання показників довговічності необхідно набрати статистику для T_{c*} . З цією метою п. 1 і 2 повторюють деяку досить велику кількість разів (N). Отже, відбувається генерування статистики часу безвідмовної роботи (відмов) системи. Далі з використанням отриманої статистики визначають показники довговічності досліджуваної системи.

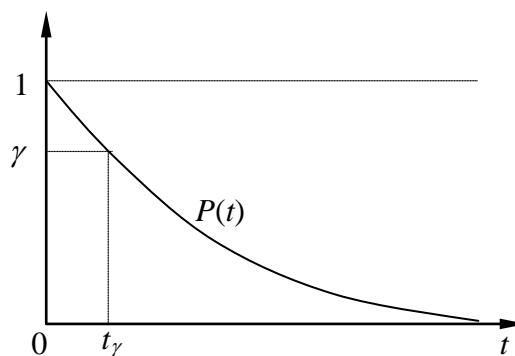


Рисунок 2.8 - Визначення гама-відсоткового ресурсу

Розглянемо питання, як маючи величини часу безвідмовної роботи елементів t_{*i} ($i = \overline{1, n}$), визначити тривалість функціонування всієї системи за її структурною схемою надійності.

1. Послідовна схема (рис. 2.9)

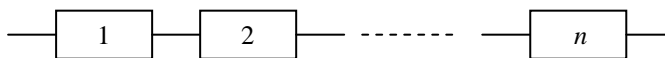


Рисунок 2.9 - Послідовне з'єднання елементів

Схема виходить з ладу, коли відмовляє перший за рахунком елемент, отже тривалість роботи схеми визначається мінімальним часом роботи елементів

$$T_{носл} = \min(t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (2.19)$$

2. Паралельна схема («гарячий» резерв) (рис. 2.10)

Схема вийде з ладу, коли відмовить останній працюючий елемент, таким чином час роботи схеми збігається з максимальним часом роботи елементів

$$T_{нар} = \max(t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (2.20)$$

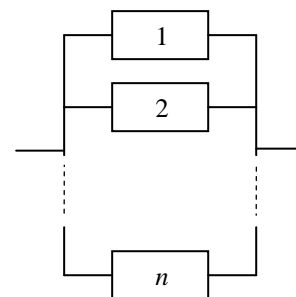


Рисунок 2.10 - Паралельне з'єднання елементів

КА, перш за все, є радіоелектронною системою, отже для забезпечення високої надійності та необхідного терміну активного існування застосування знайшли різноманітні типи резервування.

Якщо для роботи комірки «гарячого» резерву потрібна робота не менше m з n елементів (мажоритована схема). В цьому випадку необхідно часи відмов елементів розташувати в порядку зменшення

$$(t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)})$$

і у цій упорядкованій сукупності необхідно знайти елемент із номером m

$$T'_{нар} = t_{(m)}.$$

3. Загальне резервування (рис. 2.11)

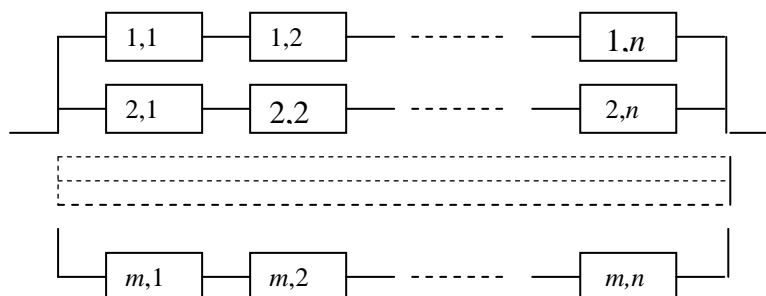


Рисунок 2.11 – Схема загального резервування

Згортаючи гілки послідовного та паралельного з'єднань згідно формул (2.19), (2.20), отримуємо

$$T_{заг.рез} = \max_{1 \leq i \leq m} (\min_{1 \leq j \leq n} (t_{ij})).$$

4. Елементне резервування (рис. 2.12)

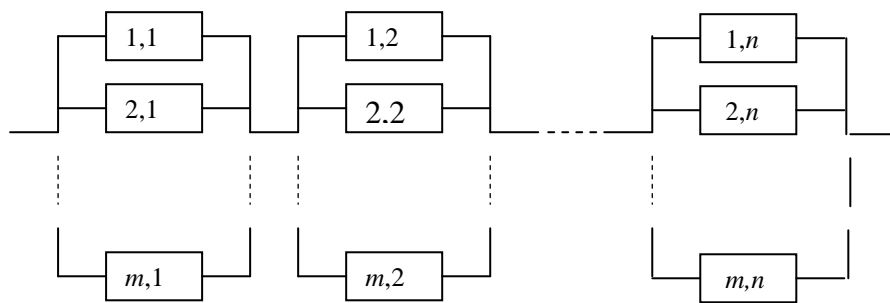


Рисунок 2.12 – Схема елементного резервування

За аналогією із загальним резервуванням, згортаючи гілки паралельного а за ними послідовного з'єднання згідно формул (2.19), (2.20). У підсумку отримуємо

$$T_{ел.рез} = \min(\max(t_{ij}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

5. «Холодне» резервування (рис. 2.13).

Для комірки «холодного» резерву маємо

$$T_{хол.рез} = \sum_{i=0}^m t_i$$

Тобто така схема працює допоки не вийде з ладу останній резервний елемент.

6. Ковзний резерв.

Для ковзного резерву в загальному випадку отримати просту формулу для визначення часу роботи схеми неможливо. Розглянемо більш просту схему, де у ковзному резерві лише один елемент, що може замінити один із n основних елементів (рис. 2.14).

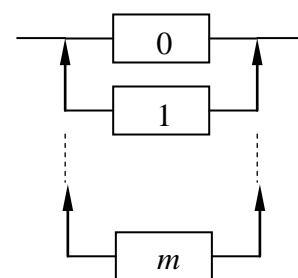


Рисунок. 2.13 – Комірка «холодного» резерву

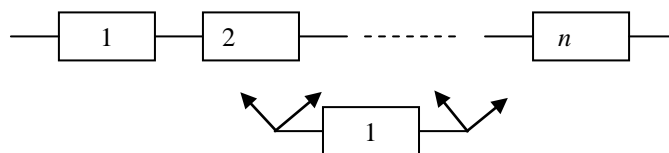


Рисунок 2.14 – Ковзне резервування

Упорядкуємо моменти часу відмов елементів за зростанням

$$(t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)}).$$

Тепер тривалість роботи системи становитиме

$$T_c = \min(t_{(1)}+t_{n+1}, t_{(2)}).$$

У випадку, якщо ми маємо m елементів, які перебувають у ковзному резерві необхідно m раз виконати розглянуту вище процедуру з упорядкуванням.

Приклад. Побудувати вираз для визначення часу роботи ТС, ССН якої представлена на рис. 2.15.

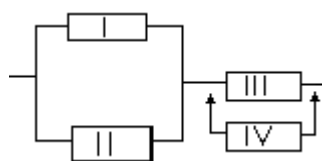


Рисунок 2.15 – ССН ТС

Відповідь: $T_c = \min(\max(t_1, t_2), t_3 + t_4)$.

Завдання для самостійної роботи.

Побудувати вирази для визначення часу роботи систем, представлених на рис. 2.16 а), б), в).

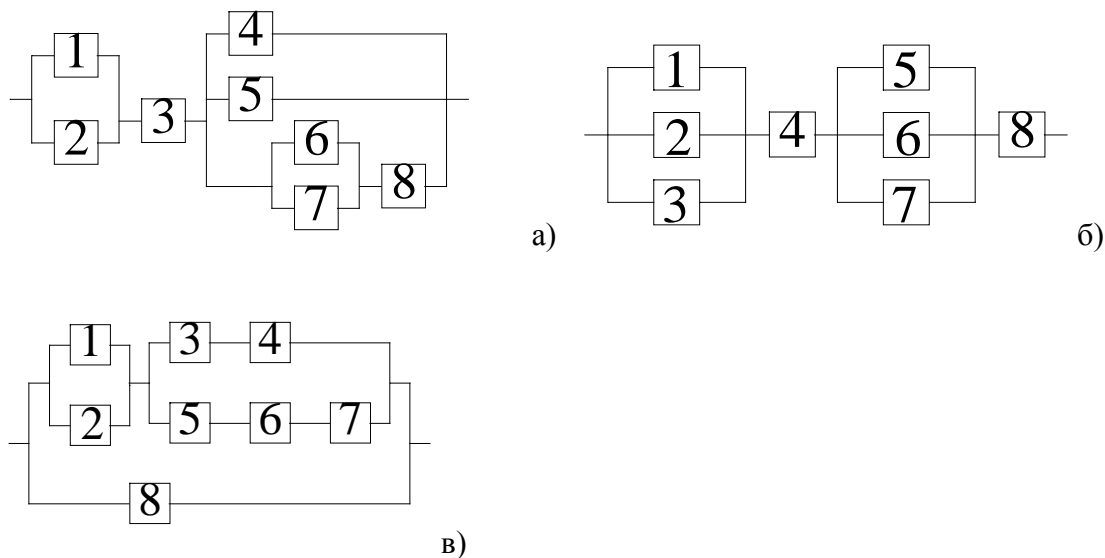


Рисунок 2.16 – ССН ТС

Визначення показників довговічності системи з урахуванням ефективності її функціонування

Такі складні системи як КА можуть переходити до граничного стану, не втрачаючи працездатності. КА включає набір цільових систем та відмова однієї (або частини) з них ще не слід трактувати як відмову КА. Подальше застосування КА в цьому випадку може виявитися неприпустимим на вимогу ефективності або економічної доцільності.

Ефективність – це властивість об'єкта, що визначає ступінь його придатності до застосування за призначенням. Для КА ефективність визначається кількістю інформації, отриманої та (або) переданої з орбіти на Землю, її якістю та цінністю. Відповідно до цього ефективність може виражатися в мегабайтах, грошовому еквіваленті (\$).

Трактуватимемо ефективність як деяку відносну (що головне безрозмірну) величину, що приймає значення з інтервалу $[0,1]$.

Ефективність істотно залежить від часу. З огляду на те, що окремі підсистеми КА з часом відмовляють, ефективність системи E зменшується, так що

$$\begin{aligned} E(t=0) &= 1; \\ E(t \rightarrow \infty) &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки відмови підсистем КА виникають випадковим чином, для конкретного часу t неможливо вказати точне значення E . Отже, для кожного конкретного моменту часу t ефективність E являє собою випадкову величину (дивись рис. 2.17). В цілому E являє собою випадкову величину, що залежить від часу, тобто випадковий процес.

Для КА вводиться граничне значення ефективності E_* , нижче якого система перестав виконувати своє функціональне призначення. Відповідно настає відмова КА. Виходячи з гранично допустимого рівня ефективності, визначається поняття середнього та гамма-відсоткового терміну активного існування КА.

Момент часу, для якого математичне сподівання $m_E(t)$ буде дорівнювати граничному значенню E_* , називають середнім ресурсом (середнім терміном активного існування КА)

$$m_E(\bar{T}_c) = E_*.$$

Для введення другого показника необхідно розглянути ймовірність того, що ефективність системи перевищує рівень E_* у певний момент часу t_i . Зокрема, заштрихована ділянка на рис. 2.17, є ймовірність того, що ефективність ТС перевищує граничний рівень E_* у певний момент часу t_i .

Гамма відсотковий термін активного існування – це термін функціонування КА $T_{c\gamma}$ протягом якого ефективний рівень роботи КА перевищує граничний рівень E_* з імовірністю γ

$$\Pr\{E(T_{c\gamma}) \geq E_*\} = \gamma \cdot 0.01.$$

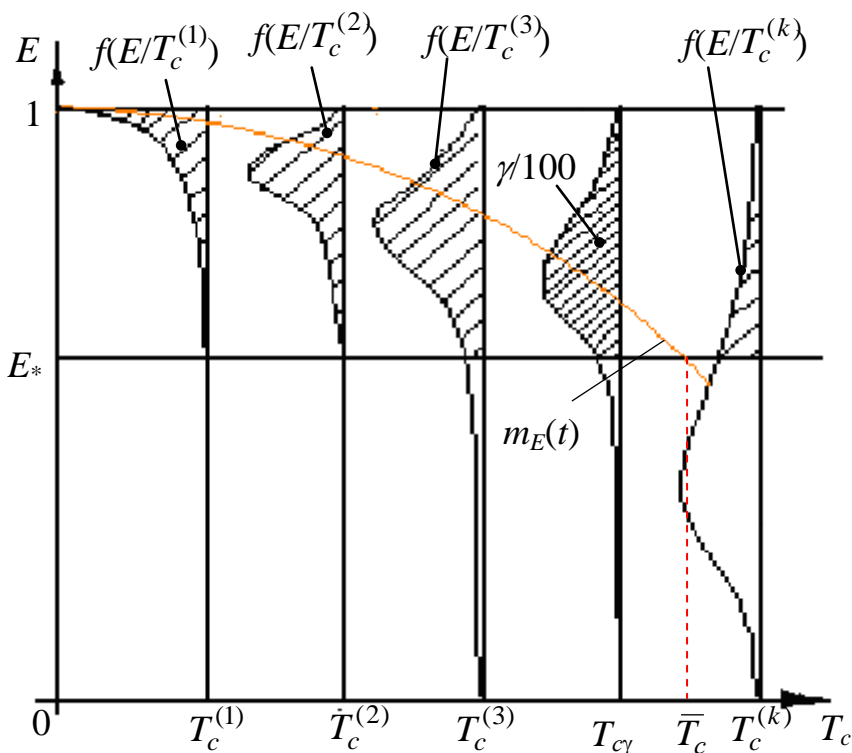


Рисунок 2.17 – Зміна ефективності функціонування ТС від часу: $f(E/T_c^{(i)})$ – розподіл показника ефективності в певний момент часу $T_c^{(i)}$.

Визначення ефективності функціонування системи

Розглянемо питання визначення ефективності системи E , виходячи з ефективності її окремих елементів (точніше вкладів окремих складових у загальну ефективність системи).

Нехай система містить n підсистем (елементів). Кожному елементу системи відповідає певне для деякого моменту часу значення ефективності E_i (внесок у загальну ефективність). При цьому

$$E_i = \begin{cases} e_i^{(n)}, & \text{у випадку, коли елемент функціонує} \\ e_i^{(e)}, & \text{у випадку відмови елемента} \end{cases}$$

Зазвичай, у разі відмови елемента $e_i^{(e)} = 0$, в іншому випадку, якщо елемент (підсистема) функціонує безвідмовно, тоді $0 < e_i^{(n)} \leq 1$.

Потрібно побудувати вираз для визначення ефективності системи по відомим ефективностям підсистем і агрегатів

$$E_c = f(E_1, E_2, \dots, E_n),$$

При цьому коли всі складові (елементи) працюють ефективність повинна дорівнювати одиниці (зокрема, $E_c = 1$ при $t = 0$).

Функція для ефективності системи визначається залежно від типу з'єднання її елементів та підсистем.

1) Послідовне з'єднання (дивись рис. 2.9)

$$E_{\text{посл}} = \prod_{i=1}^n E_i. \quad (2.21)$$

З виразу для ефективності системи для послідовного з'єднання виходить, що відмова хоча б одного елемента призводить до відмови всієї системи (для всієї системи ефективність дорівнюватиме нулю).

2) Паралельне з'єднання (дивись рис. 2.10)

$$E_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (2.22)$$

При цьому для паралельної схеми має виконуватись така умова $\sum_{i=1}^n E_i \leq 1$.

3). Комірка «холодного» резерву.

Для комірки «холодного» резерву ефективність залишається постійною та рівною $e_i^{(n)}$, поки не відмовив останній резервний елемент.

Як приклад розглянемо схему, яку показано на рис. 2.18. Вираз для ефективності системи у відповідності до формул паралельного і послідовного з'єднання елементів (2.21) і (2.22) має вигляд

$$E_c = (E_1 + E_2) \cdot (E_3 + E_4 + E_5).$$

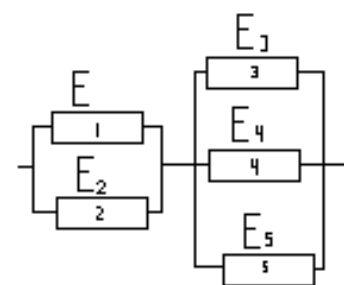


Рисунок 2.18 – Структурна схема ТС для визначення ефективності

Оцінка показників довговічності з урахуванням ефективності функціонування системи

Як вихідні дані для розрахунку необхідна наступна інформація:

- кількість елементів (підсистем);
- структурна схема надійності;

- показники надійності елементів (підсистем);
- ефективності елементів (підсистем);
- функція визначення ефективності системи $E_c = f(\bar{E})$.

Процес визначення показників довговічності має наступний вигляд.

1. Моделюються тривалість роботи елементів t_i $i = \overline{1, n}$.

2. Проміжок часу функціонування від нуля до деякого максимального значення (можна прийняти максимальний час роботи ТС для випадку, коли ефективність не враховується) точками $T_c^{(i)}$ ($i = \overline{1, k}$) розбивається на інтервали однакової довжини. Точки $T_c^{(i)}$ – суть перерізу часу, k – кількість перерізів. У кожному перерізі часу $T_c^{(i)}$ визначається поточне значення ефективності $E_c^{(i)}$ з урахуванням працюючих і елементів, що відмовили. З'єднуючи відповідні точки $E_c^{(i)}$, отримуємо траєкторію випадкового процесу $E(t)$ зміни ефективності, що представляє одну реалізацію процесу функціонування КА.

3. Здійснюють реалізацію п. 1 и 2 N разів і отримують N траєкторій процесу зміни ефективності (див. рис. 2.19).

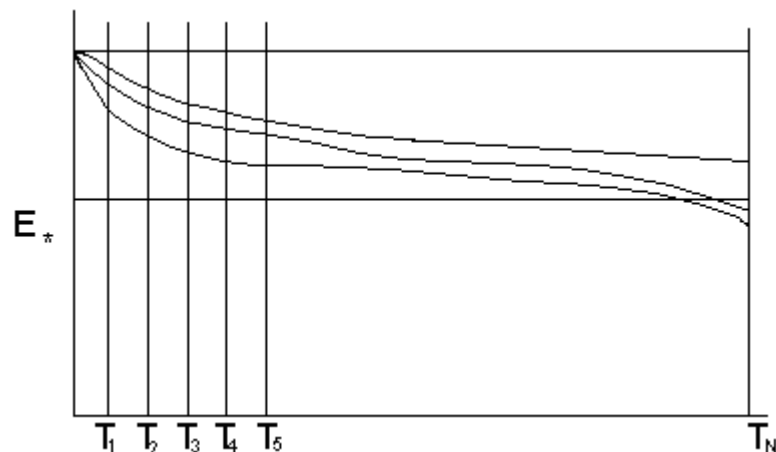


Рисунок 2.19 – Траєкторії процесу зміни ефективності

4. У кожному перерізі часу $T_c^{(i)}$ отримано статистику щодо ефективності функціонування системи, з використанням якої ми можемо оцінити середню ефективність $\bar{E}_c^{(i)}$ і ймовірність того, що ВВ $E_c^{(i)}$ перевищить критичний рівень E_* . Тепер залишилося знайти перерізу часу, для якого ми отримуємо середнє значення менше E_* та ймовірність $\Pr\{E \geq E_*\} \leq \gamma$. Останні значення можуть бути прийняті як показники довговічності.

Аналітичний метод, що використовує теорію станів системи

Для кращого розуміння дамо аналітичний спосіб оцінювання показників довговічності. Припустимо, що система містить n елементів (підсистем). Кожна з підсистем у будь-який момент часу перебуває у двох станах: робочому стані (A_i) або стані відмови \bar{A}_i . Побудуємо для деякого моменту часу функціонування t матрицю станів системи (рисунок 2.20). Загальна кількість станів $N = 2^n$.

					$P(B_j)$	E_c
A_1	A_2	..	A_n	B_1	$P(A_1)...P(A_n) = P_1(t)...P_n(t)$	$E_1 = 1$
$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$..	$\overline{A_n}$	B_2		$E_2 = ..$
A_1	A_2	..	A_n	B_3		...
...
$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$..	$\overline{A_n}$	B_{n+1}		...
A_1	A_2	..	A_n	B_{n+1}		...
...
$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$..	$\overline{A_n}$	B_N	$P(\overline{A_1})...P(\overline{A_n}) = (1 - P_1(t))...(1 - P_n(t))$	$E_N = 0$

Рисунок 2.20 – Матриця станів з урахуванням ефективності

Оскільки події B_j є попарно несумісними і утворюють повну групу подій, отже $\sum_{j=1}^N P(B_j) = 1$. Розгляд двох останніх стовпців матриці станів показує, що E_c можна розглядати як деяку дискретну ВВ

E_j	$E_1 = 1$	E_2	...	$E_n = 0$
$P(E_j) = P(B_j)$	$P(B_1)$	$P(B_2)$...	$P(B_N)$

Для дискретної ВВ E можна визначити середню ефективність для кожного моменту часу

$$\bar{E} = \sum_{j=1}^N E_j \cdot P(E_j).$$

Імовірність того, що ВВ E буде більшою за деякий критичний рівень E_* визначимо як:

$$\Pr\{E \geq E_*\} = \sum_s P(E_j),$$

де s – кількість станів, для яких $E \geq E_*$

Таким чином, для кожного моменту часу можна побудувати матрицю станів \bar{E} або $\Pr\{E \geq E_*\}$. В якості \bar{T} приймається момент часу, для якого $\bar{E} = E_*$. Для визначення t_γ необхідно визначити час, для якого $\Pr\{E \geq E_*\} = \gamma$.

Завдання для самостійної роботи

1. Для певного моменту часу визначити середню ефективність роботи системи, структурна схема якої має вигляд (рис. 2.21).

Ефективності елементів $e_1^{(n)} = 1$; $e_1^{(s)} = 0,6$; $e_2^{(p)} = 0,4$; $e_3^{(n)} = 0,6$; $e_2^{(s)} = e_3^{(s)} = 0$. Для моменту часу, що розглядається, всі стани системи рівноймовірні. Чи буде система перебувати у стані відмови, якщо $E_* = 0,5$?

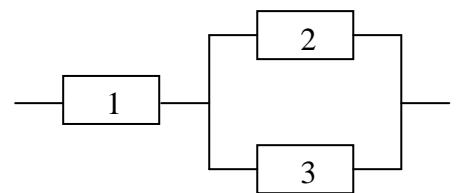


Рисунок 2.21 - ССН ТС

2. Визначити ймовірність того, що для деякого часу поточна ефективність функціонування системи перевищує граничний рівень $E_* = 0,45$. Структурна схема системи має вигляд (рис. 2.22). Ефективності елементів

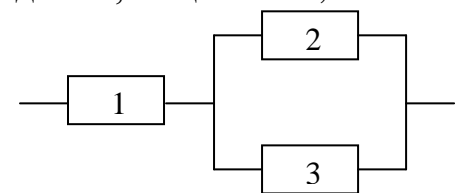


Рисунок 2.22 - ССН ТС

складають $e_1^{(n)} = 1$; $e_1^{(e)} = 0,6$; $e_2^{(n)} = 0,4$; $e_3^{(n)} = 0,6$; $e_2^{(e)} = e_3^{(e)} = 0$. Для моменту часу, який розглядається, вважається, що всі стани системи рівноймовірні. Чи буде система перебувати у стані відмови, якщо заданий рівень ймовірності $\gamma = 0,45$?

3. Визначити показники довговічності (середній ресурс і гама-відсотковий ресурс) системи тривалого функціонування з урахуванням ефективності для структурних схем, представлених на рисунку 2.23 і вихідних даних (таблиця 2.1). Перша цифра в комірках таблиці (числівник) – інтенсивність відмов; друга (знаменник) - ефективність у випадку працездатного стану. У випадку відмови ефективність елемента дорівнює нулю.

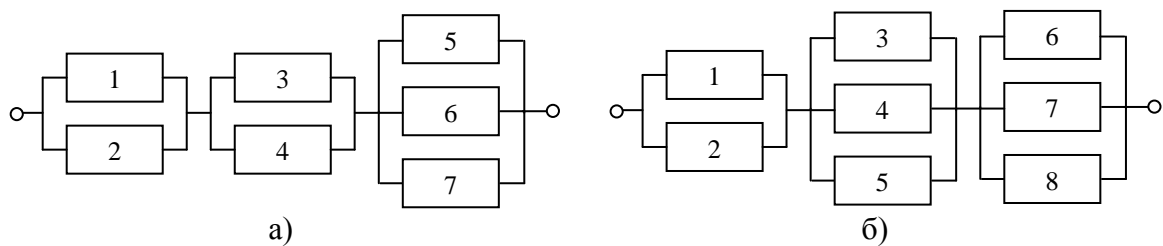


Рисунок 2.23 – ССН ТС

Таблиця 2.1

Вихідні дані для розрахунку показників довговічності ТС

Схема	Елементи								E^*	$\gamma, \%$
	1	2	3	4	5	6	7	8		
а)	$\frac{5,0 \cdot 10^{-4}}{0,4}$	$\frac{3,0 \cdot 10^{-4}}{0,6}$	$\frac{4,0 \cdot 10^{-4}}{0,5}$	$\frac{4,0 \cdot 10^{-4}}{0,5}$	$\frac{2,5 \cdot 10^{-4}}{0,5}$	$\frac{5,0 \cdot 10^{-4}}{0,25}$	$\frac{6,0 \cdot 10^{-4}}{0,25}$	—	0,65	60
б)	$\frac{5,0 \cdot 10^{-5}}{0,5}$	$\frac{5,0 \cdot 10^{-5}}{0,5}$	$\frac{6,0 \cdot 10^{-5}}{0,3}$	$\frac{3,0 \cdot 10^{-5}}{0,5}$	$\frac{7,0 \cdot 10^{-5}}{0,2}$	$\frac{6,5 \cdot 10^{-5}}{0,3}$	$\frac{6,5 \cdot 10^{-5}}{0,3}$	$\frac{5,5 \cdot 10^{-5}}{0,4}$	0,65	65

2.3.3 Додаткові питання

Моделювання випадкових величин із заданими законами розподілу

Для моделювання ВВ згідно методу Монте-Карло використовуються датчики псевдовипадкових чисел. У більшості програмних продуктів є можливість отримати рівномірно розподілену в інтервалі $[0,1]$ випадкову величину ξ_* – випадкову спробу (найчастіше ця функція має назву **random**). Подальший перехід до ВВ із необхідними законами розподілу пов'язаний із різноманітними перетвореннями.

Одержання реалізації рівномірно розподіленої ВВ на відрізку $[a, b]$ здійснюється простим перетворенням

$$x_* = a + (b - a)\xi_*$$

Для отримання реалізацій ВВ з іншими законами розподілу використовується той факт, що випадкова величина, яка представляє функцію розподілу деякої іншої ВВ, підпорядкована рівномірному закону (рис. 2.24), тому можна прирівняти

$$\xi_* = F(x_*), \quad (2.23)$$

де x_* – ВВ, що підпорядковується закону розподілу $F(x)$;

Виходячи з (2.23) отримуємо

$$x_* = F^{(-)}(\xi_*). \quad (2.24)$$

де $F^{(-)}$ – функція зворотна $F(x)$.

Для експоненціального закону $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, таким чином, застосовуючи загальне співвідношення (2.24), маємо

$$x_* = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_*).$$

Оскільки $1 - \xi_*$ також має рівномірний розподіл в інтервалі $[0, 1]$, а функція надійності $P(t)$ пов'язана з функцією розподілу часу настання відмов наступним чином

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - F(t),$$

для визначення часу роботи елементів запишемо

$$t_* = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_*.$$

Для інших розподілів генерація ВВ здійснюється відповідно до наступних формул:

для розподілу Релея $x_* = \sqrt{2\sigma}(-\ln(1 - \xi_*))^{1/2};$

для розподілу Вейбула $x_* = (-\alpha \ln(1 - \xi_*))^{1/\beta}.$

Генерація нормальної ВВ може відбуватися шляхом розв'язання рівняння (2.24) щодо функції Лапласа (дивись розділ 4), проте для цієї мети використовується центральна гранична теорема.

Центральна гранична теорема стверджує, що сума досить великої кількості слабо залежних ВВ, що мають приблизно однакові масштаби (жоден із доданків не домінує, не вносить у суму визначального вкладу), має розподіл, близький до нормального.

Згідно центральної граничної теореми генерується n рівномірно розподілених чисел ξ_{*i} , які підсумовуються

$$X_* = \sum_{i=1}^n \xi_{*i}.$$

Результат додавання становить нормальну ВВ. Проте, отримана ВВ відповідно до теорем про числові характеристики має наступні числові характеристики:

$$M(X_*) = M\left(\sum_{i=1}^n \xi_{*i}\right) = \sum_{i=1}^n M(\xi_{*i}) = n \cdot M(\xi_*) = \frac{n}{2};$$

$$D(X_*) = D\left(\sum_{i=1}^n \xi_{*i}\right) = \sum_{i=1}^n D(\xi_{*i}) = nD(\xi_*) = \frac{n}{12}$$

(для рівномірно розподіленої на інтервалі $[a, b]$ ВВ $m = \frac{a+b}{2}$, $D = \frac{(b-a)^2}{12}$).

Таким чином, для отримання стандартної нормальної ВВ необхідно провести нормування

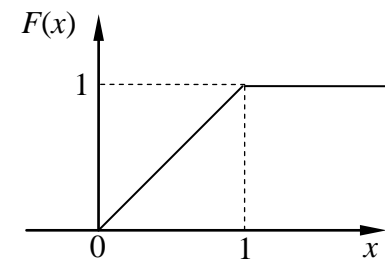
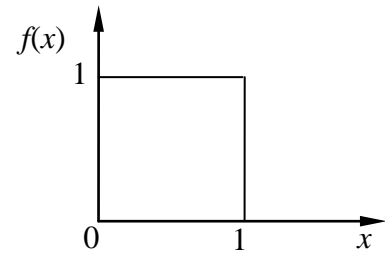


Рисунок 2.24. Функція густини і функція розподілу рівномірного закону

$$\overset{\circ}{X}_* = \frac{X_* - m_*}{\sigma_*} \text{ і далі } x_* = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_{*i} - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{3}}}.$$

Для спрощення процедури одержання стандартної нормальної величини генерують $n = 12$ рівномірно розподілених ВВ, тоді $x_* = \sum_{i=1}^{12} \xi_{*i} - 6$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Як змоделювати ВВ, які мають розподіли системи Джонсона (дивись тему 4).

Точність методу Монте-Карло

Розглянемо питання точності методу Монте-Карло на прикладі визначення показника безвідмовності МС. Надійність МС визначається за формулою (2.17)

$$P^* \approx \frac{M}{N}.$$

В цій формулі M може розглядатися як ВВ, яка являє собою суму випадкових величин

$$M = \sum_{i=1}^N X_i,$$

кожна з яких визначається наступним чином

$$X = \begin{cases} 1, & \text{Pr} = p \\ 0, & \text{Pr} = q = (1 - p) \end{cases}$$

Визначимо дисперсію випадкової величини M , яка у підсумку і буде визначати точність оцінки P^* . Для самої ВВ X маємо

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p;$$

$$D(X) = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot q = q^2 p + qp^2 = pq(p + q) = pq.$$

Тепер математичне сподівання і дисперсія випадкової величини M відповідно визначаються за формулами, що виходять з теорем про числові характеристики

$$M\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N M(X_i) = Np;$$

$$D\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N D(X_i) = Npq.$$

Отже для дисперсії оцінки надійності, яку отримано з використанням методу Монте-Карло, записуємо

$$D(P^*) = \frac{1}{N^2} Np(1 - p) = \frac{p(1 - p)}{N}.$$

Відповідно для середнього квадратичного відхилення маємо

$$\sigma_{P^*} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (2.25)$$

Таким чином, для збільшення точності результату моделювання на один порядок (для отримання одного точного знаку результату) згідно (2.25) потрібно збільшити кількість проб моделювання на два порядки.

2.4 Визначення надійності систем, що відновлюються

Для відновлюваних ТС (наприклад, систем наземного комплексу КРК) з кінцевим часом відновлення як показник надійності не може бути використаний показник безвідмовності, оскільки він не враховує відновлення працездатності (ІБР передбачає справний стан ТС протягом усього часу функціонування). В такому випадку використовуються комплексні показники надійності – функція готовності та коефіцієнт готовності. Функція готовності в момент часу t є ймовірністю того, що ТС в цей момент є працездатною.

Для побудови функції готовності розглянемо наступну діаграму (рис. 2.24). ТС може знаходитися у двох станах: працездатному («П») і стані відмови («В»). При появі відмови ТС зі стану «П» переходить у стан «В» із інтенсивністю відмов λ . Після відновлення ТС повертається у стан «П» із стану «В» з інтенсивністю відновлення μ .

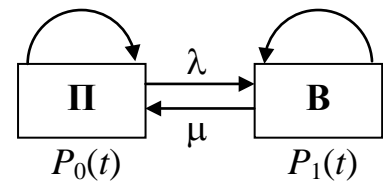


Рис. 2.24 Діаграма переходів:
«П» - працездатний стан;
«В» - стан відмови.

Працездатний стан реалізується з ймовірністю $P_0(t)$, а непрацездатний з ймовірністю $P_1(t)$. Враховуючи, що стани «П» і «В» утворюють повну групу несумісних подій, для кожного моменту часу t маємо (нормуюча умова)

$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

Складемо диференціальне рівняння, що описує процес функціонування ТС. Зафіксуємо момент часу t та знайдемо ймовірність $P_0(t+\Delta t)$ того, що в момент $(t+\Delta t)$ ТС перебуватиме в стані «П». Така подія може статися двома способами:

1 (подія **A**) у момент часу t ТС перебувала у працездатному стані, і за час Δt відмови не сталося;

2 (подія **B**) в момент часу t ТС перебувала у стані відмови, і за час Δt відбулося її відновлення.

Події **A** і **B** несумісні, отже за теоремою додавання ймовірностей

$$P_0(t+\Delta t) = P(A) + P(B).$$

Знайдемо ймовірність події **A**. Ймовірність того, що в момент часу t ТС буде у працездатному стані дорівнює $P_0(t)$. Ймовірність того, що за проміжок часу Δt не сталося відмови дорівнює $e^{-\lambda\Delta t}$. З точністю до величини другого порядку малості $e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t$ (розкладання до ряду Маклорена). Отже

$$P(A) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t).$$

Для події **B** ймовірність того, що ТС була у стані відмови дорівнює $P_1(t)$. Ймовірність того, що за час Δt відбулося відновлення з точністю до величини другого порядку $1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t$, отже

$$P(B) = P_1(t)\mu\Delta t.$$

Звідси для $P_0(t+\Delta t)$ маємо

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t.$$

Перенесемо $P_0(t)$ у ліву частину, розділимо на Δt і переходячи до межі $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо диференціальне рівняння для $P_0(t)$

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)\mu\Delta t \Rightarrow$$

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu \Rightarrow$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu.$$

З урахуванням нормування

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu(1 - P_0(t)). \quad (2.26)$$

Початкові умови диференціювання при $t = 0$, $P_0(0) = 1$ (у початковий момент часу система працездатна).

Перепишемо рівняння (2.26) у наступному вигляді

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu)P_0(t) = \mu. \quad (2.27)$$

Отримане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Загальний розв'язок (2.27) будується наступним чином:

$$P_0(t) = P_0(t)_{\text{заг.одн}} + P_0(t)_{\text{част.неодн}},$$

де $P_0(t)_{\text{заг.одн}}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння; $P_0(t)_{\text{част.неодн}}$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння.

Побудуємо розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu)P_0(t) = 0.$$

Характеристичне рівняння для нього має вигляд $k + (\lambda + \mu) = 0$, звідкіля $k = -(\lambda + \mu)$. Розв'язання однорідного рівняння будуємо як

$$P_0(t)_{\text{заг.одн}} = Ce^{kt} = Ce^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукається у формі правої частини початкового рівняння, а саме

$$P_0(t)_{\text{част.неодн}} = A.$$

Підставляючи цей вираз у початкове диференціальне рівняння, маємо

$$0 + (\lambda + \mu)A = \mu.$$

Звідки отримуємо

$$A = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Отже, загальний розв'язок (2.27) має вигляд

$$P_0(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Визначимо нормуючий коефіцієнт, з урахуванням початкової умови інтегрування

$$1 = C + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

звідкіля

$$C = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

У результаті отримуємо вираз для функції готовності

$$K_{\Gamma}(t) = P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

З урахуванням того, що інтенсивність відмов та інтенсивність відновлення зв'язані з середнім наробітком на відмову та середнім часом відновлення(ремонт) наступним чином $\bar{T} = \frac{1}{\lambda}$ і $\bar{T}_p = \frac{1}{\mu}$ (дивись (1.3) та (1.5))

вираз для $K_{\Gamma}(t)$ можна переписати у вигляді

$$K_{\Gamma}(t) = P_0(t) = \frac{\bar{T}}{\bar{T} + \bar{T}_p} + \frac{\bar{T}}{\bar{T} + \bar{T}_p} \exp\left(-\left(\frac{1}{\bar{T}} + \frac{1}{\bar{T}_p}\right)t\right).$$

Граничне значення функції готовності при $t \rightarrow \infty$ називають коефіцієнтом готовності і він дорівнює

$$K_{\Gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\Gamma}(t) = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_0 + \bar{T}_e} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Таким чином, при нескінченному збільшенні часу функція готовності $K_{\Gamma}(t)$ наближаться до певного значення (межі) – стаціонарного значення, яке на відміну від $P(t)$ не дорівнює нулю (рис. 2.25). Це відбувається за рахунок відновлення. Таким чином, коефіцієнт готовності (стаціонарне значення показника $K_{\Gamma}(t)$) це середня доля часу, коли ТС знаходиться у працездатному стані.

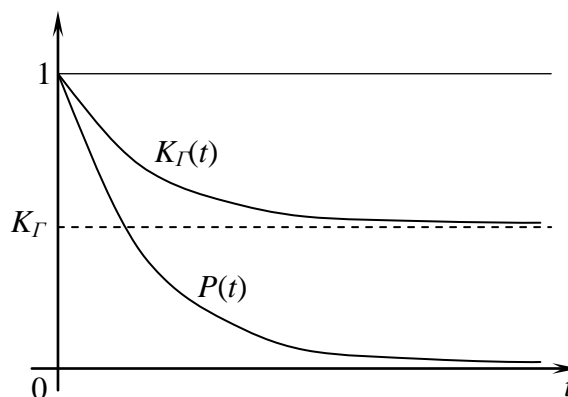


Рисунок 2.25 – Характер зміни $K_{\Gamma}(t)$

2.5 Визначення надійності технічних систем на етапі експериментального відпрацювання

Етап експериментального відпрацювання має для створення ТС особливе значення, адже на цьому етапі відбувається експериментальна перевірка технічних рішень, які закладені в ТС, а надійність доводиться до потрібного рівня.

Точкове оцінювання надійності. За результатами випробувань надійність ТС може визначатися у вигляді частоти успішних випробувань. Результати випробувань у багатьох випадках подаються у вигляді загальної кількості випробувань (n) та кількості зафіксованих у них відмов (d). Це так звана схема Бернуллі, яка описується біноміальним законом розподілу. Показники безвідмовності за цими даними визначаються наступним чином.

У разі наявності при випробуваннях відмов (у випадку $d \neq 0$) формули для оцінки надійності ТС та її середнього квадратичного відхилення мають вигляд:

$$\hat{P} = 1 - \frac{d}{n}, \quad (2.28)$$

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}, \quad (2.29)$$

де \hat{P} , $\sigma_{\hat{P}}$ – точкова оцінка надійності ТС та її середнє квадратичне відхилення відповідно.

Вираз (2.28) є незсувною, обґрунтованою та ефективною оцінкою частоти успіхів біноміального розподілу.

Для оцінки надійності ТЗ за наявними статистичними даними у випадку безвідмовних випробувань ($d = 0$) нормативна література рекомендує наступні формули

$$\hat{P} = 1 - \frac{1}{2(n+2)}; \quad (2.30)$$

$$\sigma_{\hat{P}} = \frac{1}{2(n+2)} \sqrt{\frac{5n+7}{n+3}}. \quad (2.31)$$

Формули (2.30) і (2.31) для побудови використовують байєсовський підхід заснований на застосуванні теореми Байєса (аналіз формул (2.30) і (2.31) нижче).

Байєсовський підхід використовується і для оцінювання надійності в умовах малої кількості експериментів. Він дозволяє для оцінювання надійності ТС залучити додаткову (априорну) інформацію.

Теорема Байєса. Розглядається ймовірність одночасної появи подій А і В, яка з використанням умовних ймовірностей записується наступним чином

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Виходячи із цієї формули отримуємо

$$P(A/B) = P(A) \frac{P(B/A)}{P(B)},$$

де $P(A)$ – апіорна ймовірність появи події A , визначена до того, як стала відома інформація стосовно події B ; $P(A/B)$ – апостеріорна ймовірність появи події A засновану на цій ймовірності.

Теорему можна розширити, якщо розглянути подію A та повну групу пов'язаних з нею несумісних подій H_i ($i = \overline{1, n}$, $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$) – гіпотез. Тепер

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n H_i \right) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n).$$

Ймовірність події A можна записати наступним чином (формула повної імовірності)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n) = \\ &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) \end{aligned}$$

Розглянемо ймовірність події $P(A \cap H_i)$ і для неї за аналогією запишемо

$$P(A \cap H_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i).$$

Звідки безпосередньо виходить

$$P(H_i/A) = P(H_i) \frac{P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i)}. \quad (2.32)$$

Формула (2.23) дозволяє скоригувати апіорну ймовірність гіпотези у разі, якщо з'явилася певна додаткова інформація.

Формула Байеса легко адаптується і для безперервних ВВ [9,17]. В цьому випадку апіорна ймовірність $P(H_i)$ пов'язана з апіорною густиною розподілу оцінки надійності $h(p)$ і є ймовірністю того, що ми отримаємо значення надійності в малому інтервалі dp в околі точки p , тобто $P(H_i) = h(p)dp$ (дивись рисунок 2.26). Ймовірність $P(H_i/A)$ являє собою елемент ймовірності апостеріорного розподілу, а саме $P(H_i/A) = \hat{h}(p)dp$.

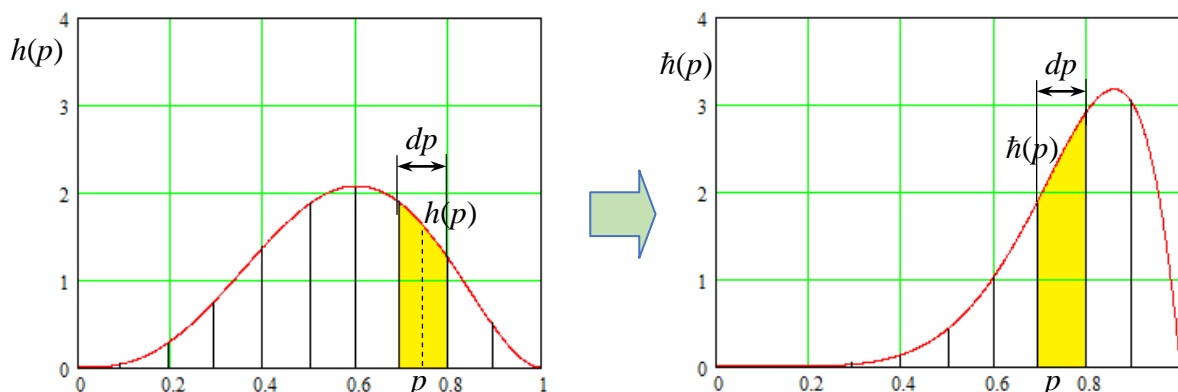


Рисунок 2.26 – Зв'язок апіорного і апостеріорного розподілів

Густина апостеріорного розподілу відповідно до теореми Байеса визначається наступним чином

$$\hat{h}(p) = \frac{l(p; n, d)h(p)}{\int_0^1 l(p; n, d)h(p)dp},$$

де $h(p)$ – густина апіорного розподілу; $l(p; n, d)$ – функція правдоподібності, що описує результати експерименту (ймовірність того, що у n випробуваннях отримано d відмов з постійною ймовірністю успішної роботи p – відповідає ймовірності $P(A/H_i)$). Якщо результати експерименту описуються біноміальним законом, функція правдоподібності має вигляд

$$l(p; n, d) = b(d; p) = C_n^d p^{n-d} (1-p)^d,$$

де $C_n^d \frac{n!}{d!(n-d)!}$.

Таким чином, вираз для функції густини апостеріорного розподілу має вигляд

$$\hat{h}(p) = \frac{p^{n-d} (1-p)^d h(p)}{\int_0^1 p^{n-d} (1-p)^d h(p) dp}. \quad (2.33)$$

Наприклад, у випадку, коли густина апіорного розподілу являє собою бета-розподіл

$$h(p) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} \quad (\alpha, \beta - \text{параметри розподілу}),$$

для апостеріорного розподілу отримуємо

$$\hat{h}(p) = \frac{p^{n-d+\alpha-1} (1-p)^{\beta+d-1}}{\int_0^1 p^{n-d+\alpha-1} (1-p)^{\beta+d-1} dp} = \frac{p^{n-y+\alpha-1} (1-p)^{\beta+d-1}}{B(n-d+\alpha, \beta+d)}.$$

Розподіл $\hat{h}(p)$ також є бета розподілом.

Байєсовська оцінка ІБР представляє математичне сподівання апостеріорної густини

$$\hat{P} = \int_0^1 p \cdot \hat{h}(p) dp. \quad (2.34)$$

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \int_0^1 p^2 \cdot \hat{h}(p) dp - \hat{P}^2. \quad (2.35)$$

В найпростішому випадку в якості апіорного розподілу оцінки надійності виберемо рівномірний розподіл на інтервалі $[0, 1]$ - $h(p) = 1$ (ми нічого не можемо сказати про певні значення надійності, вважаємо що всі можливі значення рівноімовірні). Апостеріорна густина розподілу оцінки надійності в цьому випадку буде дорівнювати

$$\hat{h}(p) = \frac{p^{n-d} (1-p)^d}{\int_0^1 p^{n-d} (1-p)^d dp}. \quad (2.36)$$

Визначимо інтеграл у знаменнику, послідовно запишемо

$$\begin{aligned} \int_0^1 p^{n-d} (1-p)^d dp &= \int_0^1 p^{n-d} \sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i p^i dp = \sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \int_0^1 p^{n-d+i} dp = \\ &= \sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{p^{n-d+i+1}}{n-d+i+1} \Big|_0^1 = \sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+1}. \end{aligned}$$

Отже для апостеріорної густини отримуємо

$$\hat{h}(p) = \frac{p^{n-d} (1-p)^d}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+1}}.$$

Байєсовська оцінка надійності згідно з формулою (2.34)

$$\hat{P} = \frac{\int_0^1 p^{n-d+1}(1-p)^d dp}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+1}}.$$

За аналогією для інтегралу в числівнику можемо отримати

$$\int_0^1 p^{n-d+1}(1-p)^d dp = \sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+2}$$

і далі

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+2}}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+1}}.$$

Для середнього квадратичного відхилення запишемо згідно (2.35)

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+3}}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^i \frac{1}{n-d+i+1}} - \hat{P}^2$$

У разі відсутності відмов в процесі проведення випробувань (випадок $d = 0$) маємо

$$\hat{h}(p) = \frac{p^n}{\int_0^1 p^n dp} = \frac{(n+1)p^n}{p^{n+1} \Big|_0^1} = (n+1)p^n.$$

Отже байєсовська оцінка надійності має вигляд

$$\hat{P} = \int_0^1 (n+1)p^{n+1} dp = \frac{n+1}{n+2}.$$

Після нескладного перетворення отримуємо кінцевий вираз

$$\hat{P} = 1 - \frac{1}{n+2}. \quad (2.37)$$

Середнє квадратичне відхилення для оцінки (2.37) визначається так

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \int_0^1 (n+1)p^{n+2} dp - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = \frac{n+1}{n+3} - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = \frac{(n+1)(n+2)^2 - (n+3)(n+1)^2}{(n+3)(n+2)^2}.$$

Після розкриття дужок і перетворення подібних маємо

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{(n+1)}{(n+3)(n+2)^2}.$$

Отже, в підсумку

$$\sigma_{\hat{P}} = \frac{1}{(n+2)} \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}. \quad (2.38)$$

Формули (2.37) і (2.38) дають гірші оцінки за (2.30) і (2.31).

Формула для отримання точкової оцінки надійності (2.30) являє собою середнє арифметичне значення математичного сподівання $\frac{n-d+1}{n+2}$ і моди $\frac{n-d}{n}$ апостеріорного розподілу (2.33) для випадку $d=0$. Як міра точності такої оцінки надійності приймається другий момент розподілу (2.33) відносно оцінки (2.30).

Аналіз свідчить, що починаючи з певних значень n , співвідношення (2.31) дає некоректний результат, завищуючи дисперсію оцінки (2.30). На підтвердження на рис. 2.27 показано значення середніх квадратичних відхилень, які отримано для випадку, коли всі проведені випробування є безвідмовними і випадку, коли в n випробуваннях сталася одна відмова (формула (2.29)). Для обсягів випробувань $n > 18$ формула (2.31) за відсутності відмов дає значення середніх квадратичних відхилень оцінок надійності, які перевищують аналогічні значення для випадку випробувань з однією відмовою, що є невірним.

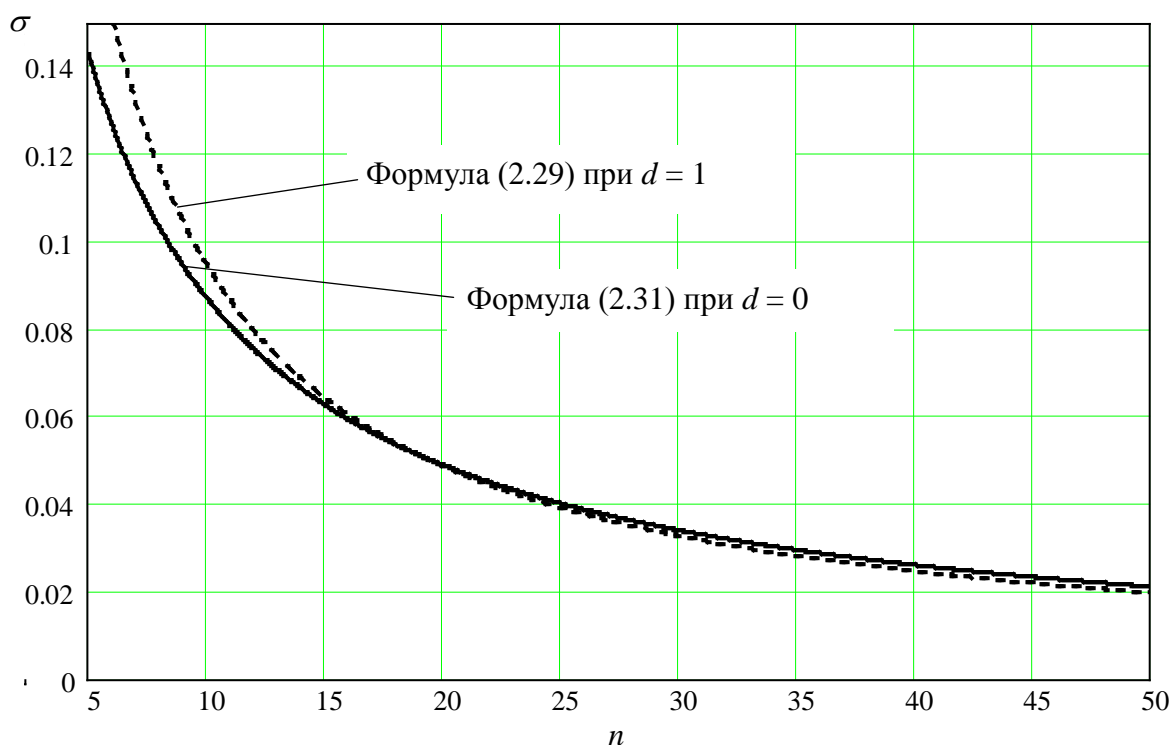


Рисунок 2.27 – Залежність середнього квадратичного відхилення оцінок ІБР від кількості проведених випробувань

Більш коректними (точними) є формули, що рекомендується НАСА

$$\hat{P} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}. \quad (2.39)$$

Точність оцінки надійності (2.39) характеризується середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma_{\hat{P}} = \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{\frac{2n+1}{n+2}}. \quad (2.40)$$

Формули (2.39), (2.40) виходять на основі Байєсовського підходу для біноміальної схеми випробувань та апіорного бета-розподілу з параметрами $\alpha = \beta = 0,5$

$$f(p) = \frac{1}{[\Gamma(0.5)]^2 p^{0.5} (1-p)^{0.5}}. \quad (2.41)$$

Розподіл (2.41), має назву Джефрїса, для біноміальної схеми випробувань є найбільш загальним неінформативним (що характеризує «бідність знання») апіорним розподілом.

Використання формул (2.39) та (2.40) для оцінки надійності ТС за відсутності відмов є більш доцільним. Рівні надійності, одержувані за формулами (2.39) та (2.30), є близькими, проте значення середнього квадратичного відхилення, що виходять за формулою (2.31), виходять завищеними порівняно з формулою (2.40), як показано на рисунку 2.28.

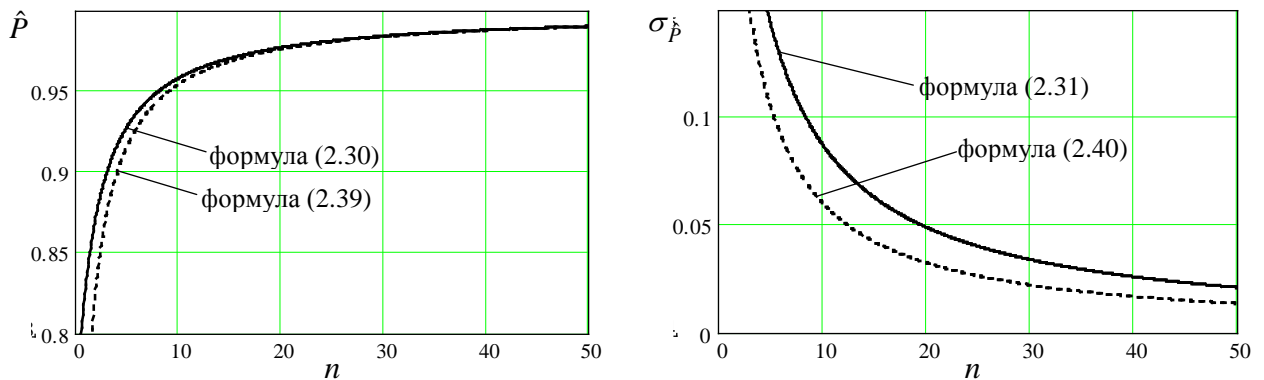


Рисунок 2.28 – Точкова оцінка надійності та її середнє квадратичне відхилення для випадку $d = 0$

В якості апіорної інформації, яка використовується для оцінки надійності ТС, можуть бути наступні дані:

1. Розробник, виходячи із свого досвіду і схеми створення ТС, стверджує, що надійність ТС буде не нижчою за певний рівень P_n ;
2. За результатами випробувань складових частин ТС отримано її надійність у вигляді точкової оцінки надійності та її середнього квадратичного відхилення \hat{P}_c та $\sigma_{\hat{P}}$;
3. За результатами проектних розрахунків отримана точкова оцінка надійності (P_c) без оцінки точності.

Кожному із цих випадків у відповідність ставимо апіорний розподіл. У першому випадку може бути використано рівномірний розподіл у інтервалі $[P_n, 1]$. В другому і третьому випадку в якості апіорного розподілу використовується бета-розподіл. Його параметри за відомих \hat{P}_c та $\sigma_{\hat{P}}$ визначаються у такий спосіб (використовується метод моментів, отримати самостійно)

$$\alpha = \hat{P}_c \left[\frac{\hat{P}_c [1 - \hat{P}_c] - 1}{\sigma_{\hat{P}_c}^2} - 1 \right];$$

$$\beta = (1 - \hat{P}_c) \left[\frac{\hat{P}_c [1 - \hat{P}_c] - 1}{\sigma_{\hat{P}_c}^2} - 1 \right].$$

Останній випадок є найбільш складним, адже для побудови бета-розподілу і визначення α і β бракує інформації (неповна апіорна визначеність), і в цьому випадку використовують оптимізаційні методи [17].

Інтервальні оцінки надійності

Отримана за результатами експериментального відпрацювання точкова оцінка надійності становить лише наближення до справжнього значення (точність такої оцінки надійності описується середнім квадратичним відхиленням). У багатьох випадках визначається інтервальна оцінка, тобто дається інтервал (односторонній або двосторонній) всередині якого із заданою наперед імовірністю γ знаходиться точне значення надійності

$$\Pr \{ \underline{P} < P < \bar{P} \} = \gamma.$$

Існує кілька способів побудови довірчого інтервалу для оцінки надійності. Припустимо, що маємо результати експерименту у вигляді загальної кількості проведених випробувань (n) та кількості відмов (d).

Перший ґрунтується на припущенні про нормальність закону розподілу оцінки надійності (використовується при значній кількості $n > 100$). В цьому випадку нижній та верхній довірчі рівні (симетричний відрізок) визначаються за формулами

$$\underline{P} = \hat{P} - \left| t_{\frac{1-\gamma}{2}} \right| \sigma_{\hat{P}};$$

$$\bar{P} = \hat{P} + \left| t_{\frac{1-\gamma}{2}} \right| \sigma_{\hat{P}},$$

де \hat{P} , $\sigma_{\hat{P}}$ – очкова оцінка надійності та її середнє квадратичне відхилення; $t_{\frac{1-\gamma}{2}}$ -

квантиль нормального розподілу порядку $\frac{1-\gamma}{2}$.

Другий заснований на використанні біноміального закону розподілу та розв'язання рівнянь Клоппера-Пірсона [7]

$$\sum_{i=0}^d C_n^i \underline{P}^{n-i} (1 - \underline{P})^i = \frac{1-\gamma}{2};$$

$$\sum_{i=0}^d C_n^i \bar{P}^{n-i} (1 - \bar{P})^i = \frac{\gamma}{2}.$$

У багатьох випадках розробник може цікавити односторонній нижній довірчий рівень. В цьому випадку нижня одностороння довірна межа надійності визначається як

$$\Pr\{\underline{P}_\gamma \leq P\} = \gamma.$$

Вона розраховується наступним чином:

у випадку нормального розподілу

$$\underline{P}_{c_\gamma} = P_c - t_\gamma \sigma_{P_c}; \quad (2.42)$$

у випадку використання біноміального розподілу

$$\sum_{i=0}^d C_n^i \underline{P}^{n-i} (1 - \underline{P})^i = 1 - \gamma. \quad (2.43)$$

У разі безвідмовних випробувань (при $d = 0$) в останньому випадку матимемо

$$\underline{P}_{c_\gamma} = (1 - \gamma)^{1/n}. \quad (2.44)$$

Тема 3

ВСТАНОВЛЕННЯ І НОРМУВАННЯ ВИМОГ ДО НАДІЙНОСТІ

Принциповим питанням в процесі проектування РКП/РН є встановлення рівня польотної надійності (показника безвідмовності) у цілому і його розподіл на складові частини (агрегати й підсистеми) нижніх рівнів (задача нормування надійності).

3.1 Формування вимог до надійності РКП/РН в цілому

Вимоги до надійності РКП/РН включаються в ТТЗ на розробку. Значення показника безвідмовності РКП/РН встановлюється із урахуванням вимог Замовника, призначення виробу, досягнутого рівня надійності РКП/РН-аналогів і виявлених тенденцій її підвищення, економічної ефективності й технічної можливості реалізації проекту. При цьому встановлюваний рівень надійності РКП/РН має бути не нижче певного мінімального значення, при якому створення виробу ще має сенс із урахуванням обмежуючих факторів за вартістю, вагою корисного вантажу, що має бути виведено на навколосемну орбіту, тощо. Таким чином, у загальному випадку визначення рівня надійності проектованої РКП/РН потребує розв'язання наступної оптимізаційної задачі

$$P \geq P_{\min}, \\ C(P) \leq C_{\max}.$$

Для обґрунтування значень показника надійності прийнято використовувати статистичну інформацію щодо систем-аналогів, а також тенденції зміни показників надійності та їх зв'язок з вартістю/масою конструкції.

Виходячи із сучасних тенденцій, для модернізуємих РКП/РН або РКП/РН, які мають аналоги, показник безвідмовності має бути не нижче за 0,95. Якщо проектований виріб є цілком новим, необхідний (нормативний) рівень надійності може становити до 0,92, а в деяких випадках може бути знижено і до 0,9. Для пілотованих РКП/РН рівень надійності має бути не нижче 0,99.

3.2 Розподіл вимог надійності на складові частини

Коли необхідний рівень показника безвідмовності для РКП/РН визначено ($P_{\text{потр}}$), перед розробником природно виникає питання: як розподілити надійність між складовими частинами, щоб забезпечити рівень надійності всієї системи не нижче необхідного (заданого) значення. Нехай система складається з n складових частин (елементів) і при цьому необхідно забезпечити необхідний рівень надійності РКП/РН – не нижче за $P_{\text{потр}}$. Отже, треба визначити такі значення показників безвідмовності складових частин щоб було виконано наступну умову

$$P_c = \varphi(P_1, P_2, \dots, P_n) \geq P_{\text{потр}}, \quad (3.1)$$

де P_i – ймовірність безвідмовної роботи i -тої складової частини; $\varphi(P_1, P_2, \dots, P_n)$ – вираз для визначення надійності ТС за відомими значеннями надійностей її складових частин (підсистем та агрегатів).

Практична більшість методів розподілу вимог до надійності на підсистеми та агрегати в постановці (3.1) передбачає послідовно з'єднану структуру незалежно працюючих елементів (рис. 3.1).

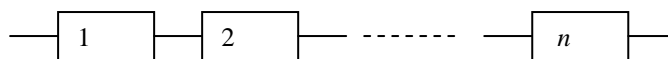


Рисунок 3.1 - Послідовна система

Рівномірний розподіл вимог до надійності

Найпростішим є спосіб рівномірного розподілу вимог до надійності між підсистемами ТС. Цей спосіб передбачає встановлення рівних значень показників безвідмовності для всіх складових частин. Для заданого рівня імовірності безвідмовної роботи ТС $P_{номр}$ показники надійності складових частин (підсистем та агрегатів) відповідно визначатимуться в такий спосіб:

$$P_i = \sqrt[n]{P_{номр}} \quad (3.2)$$

Наприклад, якщо задане значення рівня безвідмовності РКП 0,95 і її структура подається відповідно до рис. 3.2, то рівень надійності для кожної складової частини, згідно (3.2) дорівнюватиме

$$P_i = \sqrt[8]{0,95} = 0,9936 \quad (i = \overline{1, 8}).$$



Рисунок 3.2 - ССТ гіпотетичної РКП

Істотний недолік методу рівномірного розподілу вимог до надійності полягає в тому, що не враховується відмінність у складності, вартості, важливості складових частин (підсистем та агрегатів) РКП/РН. Вочевидь, такий спосіб розподілу вимог до надійності має застосовуватися за відсутності будь-якої попередньої інформації щодо надійності підсистем.

Існує велика група методів, що дозволяє відмовитися від рівної надійності підсистем. Розглянемо деякі з них.

Метод базових елементів

В цьому методі вихідна послідовна схема ТС замінюється розширеною послідовною структурою (див. рис. 3.3), у якій кожна з підсистем являє собою послідовно з'єднану структуру певної кількості базових елементів.

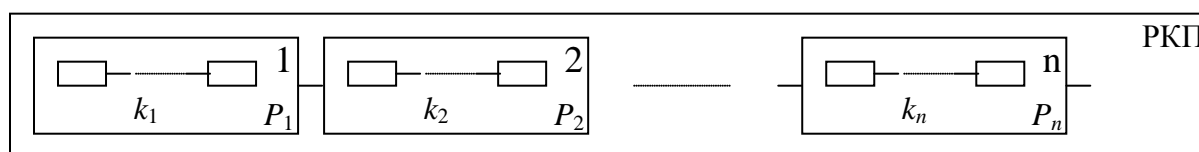


Рисунок 3.3 – ССТ РКП з урахуванням базових елементів

У цьому випадку показник безвідмовності кожної підсистеми визначається в такий спосіб

$$P_i = P_0^{k_i},$$

де P_0 – надійність базового елемента; k_i – кількість базових елементів, що складають вихідний елемент у структурній схемі.

Таким чином, надійність ТС може бути визначена так

$$P = \prod_{i=1}^n P_0^{k_i} = P_0^{\sum_{i=1}^n k_i}.$$

З останнього співвідношення визначається значення показника безвідмовності базового елемента

$$P_0 = \sqrt[n]{P_{номр}}.$$

Кількість базових елементів, з яких складається кожна підсистема, визначається методом експертних оцінок з урахуванням важливості, ваги й складності складової частини, витрат на її створення та підтримку заданого рівня безвідмовності.

Метод рівномірного збільшення надійності

На практиці дуже часто відомою є інформація про досягнуті рівні надійності складових частин – підсистем-аналогів, отримані на етапі експериментального відпрацювання або льотних випробувань. Цю інформацію природно можна використати в процесі розподілу вимог до надійності. Нехай у нас є структура підсистем ТС, і відомі досягнуті рівні надійності підсистем-аналогів. У більшості випадків для них виконується наступна нерівність

$$\prod_{i=1}^n P_i < P_{номр}.$$

Отже, необхідно визначити нові рівні надійності підсистем (підвищити), які б дали можливість підвищити показник безвідмовності системи в цілому до необхідного рівня. Можна це зробити в такий спосіб: надійність кожного елемента збільшують на деяке число k ($k > 1$), що є сталим для всіх підсистем

$$P'_i = kP_i.$$

Таким чином, задача розподілу вимог до надійності звелася до визначення коефіцієнта k , на який необхідно збільшити показники безвідмовності складових частин (підсистем і агрегатів). Він визначається в такий спосіб

$$k = \sqrt[n]{\frac{P_{номр}}{\prod_{i=1}^n P_i}}.$$

Метод збільшення надійності підсистем з меншою надійністю

Нехай як і в попередньому випадку для наявних оцінок надійності підсистем-аналогів виконується наступна нерівність

$$\prod_{i=1}^n P_i < P_{номр}.$$

Один зі способів розподілу вимог до надійності на підсистеми й агрегати був запропонований в одній з перших робіт з надійності [12]. Цей спосіб було використано фахівцями НАСА під час розробки програми Сатурн-Аполлон. Згідно з цим методом показники безвідмовності підсистем-аналогів розташовують у порядку зростання

$$P_1 < P_2 < \dots < P_n.$$

Тепер кожен з показників надійності P_1, P_2, \dots, P_k (певної кількості підсистем) збільшується до одного і того самого рівня P_0 , а надійності інших складових P_{k+1}, \dots, P_n залишаються незмінними. Значення номера k приймається рівним останньому j , для якого виконується умова

$$P_j < \left[\frac{P_{nomp}}{\prod_{i=j+1}^{n+1} P_i} \right]^{1/j} = r_j, \quad (3.3)$$

де $P_{n+1}=1$.

Значення P_0 визначається в такий спосіб

$$P_0 = \left[\frac{P_{nomp}}{\prod_{i=k+1}^{n+1} P_i} \right]^{1/k}. \quad (3.4)$$

Тепер надійність системи в цілому буде дорівнювати

$$P_0^k \cdot P_{k+1} \cdot \dots \cdot P_n = P_{nomp}.$$

Процес такого підвищення може бути візуально продемонстровано на рис. 3.4.

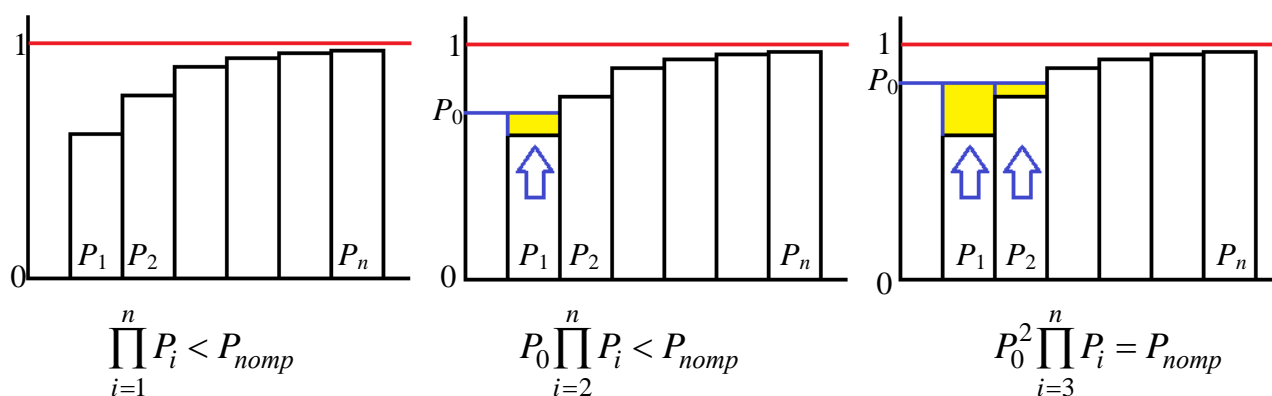


Рисунок 3.4 - Процес збільшення надійності найбільш ненадійних елементів.

Приклад. Заданий необхідний рівень надійності РКП становить $P_{потр} = 0,95$. Структурна схема надійності тріступеневої РКП представлена на рисунку 3.2. Показники безвідмовності підсистем-аналогів, упорядковані за зростанням, наведено в таблиці 3.1. Результати розрахунку згідно (3.3) і (3.4) наведено у таблиці 3.1 у двох останніх стовпчиках.

Таблиця 3.1

Нормування показників безвідмовності РКП методом збільшення надійності найбільш ненадійних елементів

Підсистема	Показник безвідмовності системи – аналога	r	Потрібний рівень надійності
1-ий ступінь	0,9650	1.011	0,9860
2-ий ступінь	0,9720	0.9913	0,9860
РБ	0,9755	0.986	0,9860
Система керування	0,9950	0.9882	0,9950
Система відокремлення ступенів	0,9986	0.9903	0,9986
Система скидання ГАО	0,9990	0.9918	0,9990
Система відокремлення РБ	0,9992	0.9928	0,9992
Система відокремлення КА	0,9992	0.9936	0,9992
РКП	0,9068		0,95

У розглянутому прикладі видно, що для досягнення заданого рівня показника безвідмовності РКП необхідно підвищити надійність найбільш складних і дорогих підсистем (першого і другого ступенів). Це, напевно, буде пов'язано з великими матеріальними витратами.

Оптимальний розподіл вимог до надійності

Для урахування таких важливих факторів як вага, вартість тощо в процесі нормування вимог до надійності ТС розглядається задача оптимального розподілу необхідного рівня надійності на підсистеми й агрегати. Математично така задача формулюється в такий спосіб: треба забезпечити екстремум функції якості ТС

$$F(P_1, P_2, \dots, P_n) \Rightarrow \text{extr} (\min/\max)$$

при наступних обмеженнях

$$P_c = \phi(P_1, P_2, \dots, P_n) \geq P_{\text{нотр}},$$

$$0 < P_i < 1, \quad i = \overline{1, n},$$

де $F(P_1, P_2, \dots, P_n)$ - цільова функція, яка пов'язує критерій якості (через проектні параметри і характеристики) з показниками надійності підсистем. Стосовно виробів ракетно-космічної техніки в якості цільової функції (критерію оптимізації) зазвичай використовується маса РКП/РН, витрати, що потрібні на проектування, виготовлення, забезпечення необхідного рівня безвідмовності, тощо. У загальному випадку цільову функцію може бути представлено лінійним функціоналом виду

$$F(P_1, P_2, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n F_i(P_i),$$

де $F_i(P_i)$ – окремий критерій для кожної i -тої підсистеми. Одержання аналітичних виразів $F_i(P_i)$ передбачає побудову залежностей типу «вага -

надійність» або «вартість - надійність» для кожної підсистеми й агрегату РКП/РН.

Треба зауважити, що можливим є одночасне використання декількох критеріїв. У цьому випадку доводиться використовувати багатокритеріальний підхід, який припускає зведення сукупності критеріїв, що розглядаються, до одного глобального критерію.

У якості критерію оптимізації виберемо витрати на забезпечення надійності виробу. Вираз для цього критерію напишемо у вигляді

$$C = \sum_{i=1}^n C_i(P_i),$$

де C – сумарні витрати на забезпечення надійності виробу; $C_i(P_i)$ – функція витрат на забезпечення необхідного рівня безвідмовності P_i для i -тої складової частини (підсистеми).

Розглянемо підхід, який може бути використаний на стадії проектування й не вимагає побудови моделі «вартість - надійність». Будемо вважати, що досягнуті рівні надійності аналогів бортових систем РКП/РН є відомими, дорівнюють P_i^0 , а витрати на забезпечення надійності для кожної підсистеми (фактично являють собою вартості підсистем) пропорційні логарифму ймовірності відмови. Остання для складових частин також розраховується на основі інформації за підсистемами-аналогами. Сумарні витрати на забезпечення надійності проектованої РКП/РН у цьому випадку можна записати у вигляді

$$C = \sum_{i=1}^n -c_i \ln Q_i, \quad (3.5)$$

де $Q_i = 1 - P_i$ – імовірність відмови i -тої складової підсистеми, c_i – вагові коефіцієнти, які з урахуванням інформації щодо підсистем-аналогів можуть бути визначені таким чином

$$c_i = \frac{C_{0_i}}{\ln(1 - P_i^0)},$$

де C_{0_i} – вартість підсистеми-аналога.

Отже, необхідно забезпечити мінімум функції витрат (3.5) з урахуванням обмеження типу рівності

$$\prod_{i=1}^n (1 - Q_i) = P_{номп}. \quad (3.6)$$

Сформульована задача оптимального розподілу вимог до надійності (пошуку умовного екстремуму з обмеженням типу рівності) розв'язується з використанням методу невизначених множників Лагранжа. Для цього будується функція Лагранжа

$$\Phi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n; \lambda) = \sum_{i=1}^n -c_i \ln Q_i + \lambda \left[\prod_{i=1}^n (1 - Q_i) - P_{номп} \right],$$

де λ – невизначений множник Лагранжа.

Тепер для знаходження мінімуму функції $\Phi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n; \lambda)$ (розглядається задача безумовної оптимізації) будується система алгебраїчних рівнянь, похідних за кожною змінною (включно з λ), які повинні дорівнювати нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n; \lambda)}{\partial Q_i} = 0, & i = \overline{1, n} \\ \frac{\partial \Phi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Система має вигляд і містить $(n+1)$ невідому

$$\begin{cases} \frac{-c_i}{Q_i} - \lambda \frac{P_{номп}}{1 - Q_i} = 0, & i = \overline{1, n} \\ \prod_{i=1}^n (1 - Q_i) = P_{номп} \end{cases}$$

Перший спосіб розв'язання системи. Із перших n рівнянь отримуємо вирази для Q_i

$$Q_i = \frac{c_i}{\lambda P_{номп} - c_i} \quad (i = \overline{1, n})$$

і підставивши їх у останнє рівняння системи, матимемо одне рівняння для визначення λ , а саме

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{c_i}{\lambda P_{номп} - c_i} \right) = P_{номп}.$$

Визначивши із нього λ далі визначаємо Q_i і P_i ($i = \overline{1, n}$).

Другий спосіб розв'язання системи. Шляхом багаторазової заміни змінних Q_i і перетворень вихідних рівнянь розв'язок може бути зведене до рівняння з одним невідомим (відносно Q_1)

$$\frac{c_1^{n-1} (1 - Q_1)^n}{\prod_{i=2}^n [c_1 + A_i Q_1]} = P_{номп}, \quad (3.7)$$

де $A_i = c_i - c_1, i = \overline{2, n}$, а також системи рівнянь, яку може бути виражено одним рекурентним рівнянням

$$Q_i = \frac{c_i Q_1}{c_1 (1 - Q_1) + c_i Q_1}, \quad i = \overline{2, n} \quad (3.8)$$

Значення невизначеного множника Лагранжа в цьому випадку дорівнює

$$\lambda = \frac{c_1 (1 - Q_1)}{Q_1 P_{номп}}.$$

Отже, розв'язок рівняння (3.7) чисельними методами дозволяє визначити Q_1 з урахуванням необхідного рівня показника безвідмовності всієї системи $P_{номп}$. І далі з використанням (3.8) послідовно визначаються Q_i і P_i .

Приклад. Нехай нормативне значення показника безвідмовності $P_{\text{потр}}$ для розроблювальної РКП складає 0,95. У складі РКП виділено 8 підсистем, які в структурній схемі надійності послідовно з'єднані (див. рис. 3.2). Досягнуті значення показників надійності підсистем-аналогів P_i^0 і їх вартості C_{0_i} відомі й наведено в табл. 3.2. Використовуючи вирази (3.7) і (3.8), визначаються вимоги до складових частин РКП. Результати розрахунків наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Оптимальний розподіл вимог до надійності складових частин РКП

Підсистема	P_i^0	C_{0_i} , тис. умов. од.	Q_i	P_i
1-ий ступінь	0,9650	980,0	0.022749	0.977251
2-ий ступінь	0,9720	510,0	0.011231	0.988769
РБ	0,9755	682,0	0.014431	0.985569
Система керування	0,9950	60,6	0,000910	0.999090
Система відокремлення ступенів	0,9986	31,7	0,000384	0.999616
Система скидання ГАО	0,9990	24,3	0,000280	0.999720
Система відокремлення РБ	0,9992	37,0	0,000413	0.999587
Система відокремлення КА	0,9992	41,5	0,000463	0.999537

У порівнянні з результатами таблиці 3.1 бачимо, що для першого ступеня необхідно незначне підвищення надійності, що обумовлено більшою її вартістю.

3.3 Розподіл вимог до показника безвідмовності у нижніх довірчих межах

У деяких випадках для ТС (РКП/РН) вимоги до надійності можуть встановлюватися для нижньої односторонньої довірчої межі у вигляді $\underline{P}_{c_\gamma}^{(номр)}$, де γ – необхідний рівень довіри. У цьому випадку під час створення ТС розробнику необхідно прагнути до виконання наступної нерівності

$$\underline{P}_{c_\gamma} \geq \underline{P}_{c_\gamma}^{(номр)}, \quad (3.9)$$

де \underline{P}_{c_γ} – нижня одностороння довірча межа досягнутого рівня надійності системи.

Перехід від нижньої довірчої межі до точкової оцінки надійності та її середнього квадратичного відхилення. Для розв'язку задачі нормування показника безвідмовності в цьому випадку використовується кілька способів. Найпоширеніший з них передбачає перетворення вимоги до нижньої довірчої межі $\underline{P}_{c_\gamma}^{(номр)}$ у вимоги до точкової оцінки надійності системи і її середнього квадратичного відхилення, що характеризує точність одержуваної оцінки, а саме

$$\underline{P}_{c\gamma}^{(nomp)} \rightarrow \begin{cases} P_c^{(nomp)} \\ \sigma_{P_c}^{(nomp)} \end{cases},$$

де $P_c^{(nomp)}$ – необхідний рівень для точкової оцінки надійності ТС; $\sigma_{P_c}^{(nomp)}$ – необхідний рівень середнього квадратичного відхилення.

Таким чином, задання вимог до надійності у вигляді (3.9) виявляється еквівалентним встановленню пари вимог

$$\begin{cases} P_c \geq P_c^{(nomp)} \\ \sigma_{P_c} \leq \sigma_{P_c}^{(nomp)} \end{cases} \quad (3.10)$$

Далі задача нормування зводиться до розподілу вимоги $P_c^{(nomp)}$ на підсистеми й агрегати нижнього рівня відомими методами. Для другої вимоги (3.10) проводиться тільки оцінка виконання.

Таким чином, в процесі розв'язання задачі нормування надійності вищезазначеним способом, насамперед, необхідно визначити необхідну точкову оцінку надійності (а разом з нею і її середнє квадратичне відхилення), що відповідає нижній довірчій межі $\underline{P}_{c\gamma}^{(nomp)}$. У більшості практичних випадків перехід (3.10) здійснюється через еквівалентну кількість безвідмовних випробувань. Для цього використовується нормальний або біноміальний розподіл, який описує оцінку надійності ТС.

Виходячи з нормального розподілу оцінки надійності, нижня довірча межа визначається у такий спосіб (2.42)

$$\underline{P}_{c\gamma} = P_c - t_\gamma \sigma_{P_c}, \quad (3.11)$$

де P_c – точкова оцінка надійності ТС; σ_{P_c} – середнє квадратичне відхилення; t_γ – односторонній квантиль стандартного нормального розподілу, який відповідає довірчій ймовірності γ .

У випадку безвідмовних випробувань P_c і σ_{P_c} можуть бути, наприклад, визначені з використанням наступних співвідношень (2.39) і (2.40)

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2(n+1)}; \quad (3.12)$$

$$\sigma_P(n) = \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{\frac{2n+1}{n+2}}, \quad (3.13)$$

де n – кількість безвідмовних випробувань ТС.

Таким чином, розв'язуючи відносно n рівняння (3.11)

$$\underline{P}_{c\gamma} = P_c(n) - t_\gamma \cdot \sigma_{P_c}(n),$$

в подальшому визначаються точкова оцінка надійності та її середнє квадратичне відхилення згідно з формулами (3.12) і (3.13).

У таблиці 3.3 наведено значення еквівалентної кількості безвідмовних випробувань і відповідні їм точкові оцінки надійності та їх середні квадратичні відхилення для певних рівнів $\underline{P}_{c\gamma}$ і γ .

Таблиця 3.3

Еквівалентна кількість безвідмовних випробувань, точкова оцінка надійності та її середнє квадратичне відхилення, що відповідають певним $\underline{P}_{c\gamma}$ і γ

$\underline{P}_{c\gamma}$	$\gamma(t_\gamma)$		
	0,8 (0,842)	0,9 (1,282)	0,95 (1,645)
0,90	9,533	12,497	15,064
	0,953	0,963	0,969
	0,063	0,050	0,042
0,91	10,72	14,125	16,818
	0,957	0,967	0,972
	0,057	0,045	0,038
0,92	12,224	16,01	19,234
	0,962	0,971	0,975
	0,051	0,040	0,034
0,93	14,22	18,586	22,119
	0,967	0,974	0,978
	0,044	0,035	0,030
0,94	16,714	21,849	25,819
	0,972	0,978	0,981
	0,038	0,030	0,026
0,95	20,438	26,22	31,607
	0,977	0,982	0,985
	0,032	0,025	0,021
0,96	25,606	33,468	39,443
	0,981	0,985	0,988
	0,026	0,020	0,017
0,97	34,818	44,177	53,498
	0,986	0,989	0,991
	0,019	0,015	0,013
0,98	52,944	67,164	78,007
	0,991	0,993	0,994
	0,013	0,010	0,0089

Примітка. У комірці перше число - еквівалентна кількість безвідмовних випробувань (n), друге - точкова оцінка надійності (P_c); третє - середнє квадратичне відхилення оцінки надійності (σ_{P_c}).

Виходячи з біноміального розподілу, що описує результати випробувань ТС, кількість безвідмовних випробувань, що відповідають $\underline{P}_{c\gamma}$, визначається згідно формули

$$n = \frac{\lg(1 - \gamma)}{\lg(\underline{P}_{c\gamma})}, \quad (3.14)$$

яка безпосередньо впливає зі співвідношення (2.44).

Отримані згідно (3.14) кількості безвідмовних випробувань ТС, що відповідають певним $\underline{P}_{c,\gamma}$ і γ , наведено у таблиці 3.2.

Таблиця 3.4

Кількість безвідмовних випробувань, що відповідає певним $\underline{P}_{c,\gamma}$ і γ

γ	$\underline{P}_{c,\gamma}$								
	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98
0,8	15,3	17,1	19,3	22,2	26,0	31,4	39,4	52,8	79,7
0,9	21,8	24,4	27,6	31,7	37,2	44,9	56,4	75,6	114,0
0,95	28,4	31,8	35,9	41,3	48,4	58,4	73,4	98,4	148,3

Тепер для отриманого значення еквівалентної кількості безвідмовних випробувань n необхідно визначити P_c і σ_{P_c} , наприклад, з використанням співвідношень (3.12) і (3.13).

Порівняльний аналіз даних таблиць 3.3 і 3.4 показує, що кількість безвідмовних випробувань, отриманих згідно (3.14) для біноміального розподілу, значно перевищує відповідну кількість випробувань, одержувану з використанням нормального розподілу, що безпосередньо буде призводити до більш високих необхідних значень точкової оцінки надійності.

Розглянемо ще один підхід [6]. Будемо вважати, що розподіл оцінки надійності ТС підпорядковується бета-розподілу

$$f(p; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}, \quad (3.15)$$

де $p \in [0, 1]$, $\alpha, \beta \geq 0$, $B(\alpha, \beta)$ – бета-функція, яка виражається через гамма-функцію в такий спосіб $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$.

Будемо шукати такий бета-розподіл оцінки надійності (3.15), який при заданому $\underline{P}_{c,\gamma}$ є найменш інформативним. Останнє визначається з використанням ентропії, яка є мірою апіорної невизначеності [1]. Таким чином, необхідно визначити максимум функції ентропії розподілу (3.15)

$$H(\alpha, \beta) = - \int_0^1 \ln(f(p; \alpha, \beta)) f(p; \alpha, \beta) dp \rightarrow \max_{\alpha, \beta} \quad (3.16)$$

за умови типу рівності

$$\int_{\underline{P}_\gamma}^1 f(p; \alpha, \beta) dp = \gamma. \quad (3.17)$$

Відзначимо деякі властивості функції $H(\alpha, \beta)$. Поверхня функції $H(\alpha, \beta)$ показано на рисунку 3.5. Максимум функції $H(\alpha, \beta) = 0$ досягається при $\beta = \alpha = 1$. Цим підтверджується відомий факт, що у випадку відсутності

обмежень на параметри α і β , найменш інформативним є рівномірний розподіл, який представляє окремий випадок бета-розподілу у разі $\alpha = \beta = 1$.

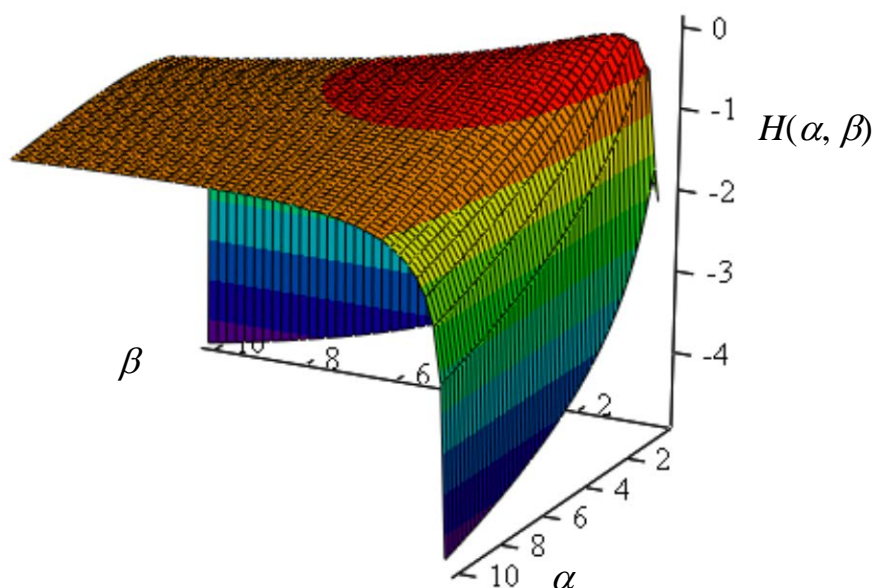


Рисунок 3.5 – Графік поверхні $H(\alpha, \beta)$

Функція $H(\alpha, \beta)$ має властивість симетрії, таким чином, що $H(\alpha, \beta) = H(\beta, \alpha)$. На рис. 3.6 показані криві $H(\alpha, \beta)$ при заданих значеннях параметра β . Їхній аналіз показує, що зі збільшенням β максимум функції $H(\alpha, \beta)$ зміщується у бік більших значень α .

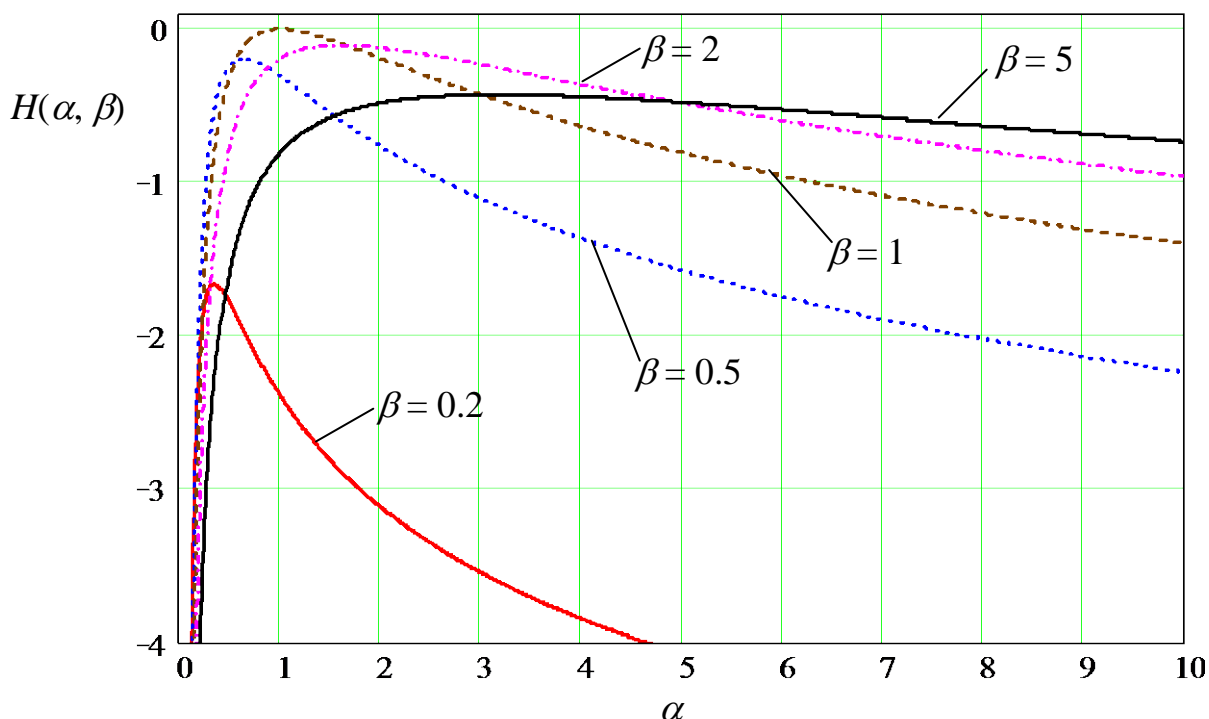


Рисунок 3.6 – Графік функції $H(\alpha, \beta)$ для певних значень β

Задача визначення максимуму (3.16) при обмеженні типу рівності (3.17) належить до класу задач математичного програмування. У таблиці 3.5 наведено

значення P_c і σ_{P_c} для відповідних α і β , отриманих у результаті розв'язку зазначеної оптимізаційної задачі з використанням пакета MathCAD (стандартної функції Maximize). Формули для розрахунків P_c і σ_{P_c} для бета розподілу (3.15) мають вигляд

$$P_c = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad (3.18)$$

$$\sigma_{P_c}^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (3.19)$$

Таблиця 3.5

Значення P_c і σ_{P_c} , а також α і β , отримані шляхом розв'язання оптимізаційної задачі (3.16) і обмеженнями (3.17), які відповідають певним $\underline{P}_{c\gamma}$ і γ

$\underline{P}_{c\gamma}$	γ		
	0,8	0,9	0,95
0,90	0,938 0,055 (17,47; 1,164)	0,951 0,037 (31,226; 1,626)	0,9565 0,0292 (45,575; 2,07)
0,91	0,944 0,050 (19,54; 1,165)	0,956 0,034 (34,995; 1,631)	0,9609 0,0263 (51,316; 2,091)
0,92	0,950 0,044 (22,158; 1,168)	0,960 0,030 (39,739; 1,637)	0,9653 0,0234 (58,119; 2,091)
0,93	0,956 0,039 (25,481; 1,169)	0,965 0,026 (45,793; 1,641)	0,9696 0,0205 (67,192; 2,107)
0,94	0,962 0,034 (29,936; 1,170)	0,970 0,022 (53,662; 1,637)	0,9740 0,0176 (79,181; 2,118)
0,95	0,969 0,028 (36,175; 1,172)	0,975 0,019 (65,327; 1,655)	0,9783 0,0146 (95,904; 2,127)
0,96	0,975 0,023 (45,49; 1,172)	0,980 0,015 (82,388; 1,661)	0,9827 0,0117 (120,945; 2,134)
0,97	0,981 0,017 (61,098; 1,175)	0,985 0,011 (110,773; 1,666)	0,9870 0,0088 (161,504; 2,119)
0,98	0,987 0,012 (92,316; 1,177)	0,9901 0,0076 (168,087; 1,678)	0,9928 0,0065 (169,399; 1,228)

Примітка. У комірці перше число - точкова оцінка надійності (P_c), друге - середнє квадратичне відхилення оцінки надійності (σ_{P_c}); у дужках значення параметрів α і β .

У таблиці 3.5 наведено значення P_c і σ_{P_c} , що отримано для значень α і β , які перевищують одиницю. У той же час необхідно відзначити, що для значень $\underline{P}_{c\gamma}$ і γ досить близьких до одиниці можливий розв'язок задачі й для J-образного бета-розподілу, тобто для випадку, коли $0 < \beta < 1$.

Порівняння даних таблиць 3.3 і 3.5 показує, що використання нормального розподілу призводить до більш високих необхідних значень точкової оцінки надійності ТС, що відповідають заданому нижньому довірчому рівню, у порівнянні зі значеннями, отриманими шляхом розв'язку оптимізаційної задачі (3.16). Останнє пояснюється тим, що нормальний розподіл, який використовується для опису оцінки надійності, на відміну від бета-розподілу має необмежену варіацію, і відповідно виходить за межу 1 (як показано на рисунку 3.7).

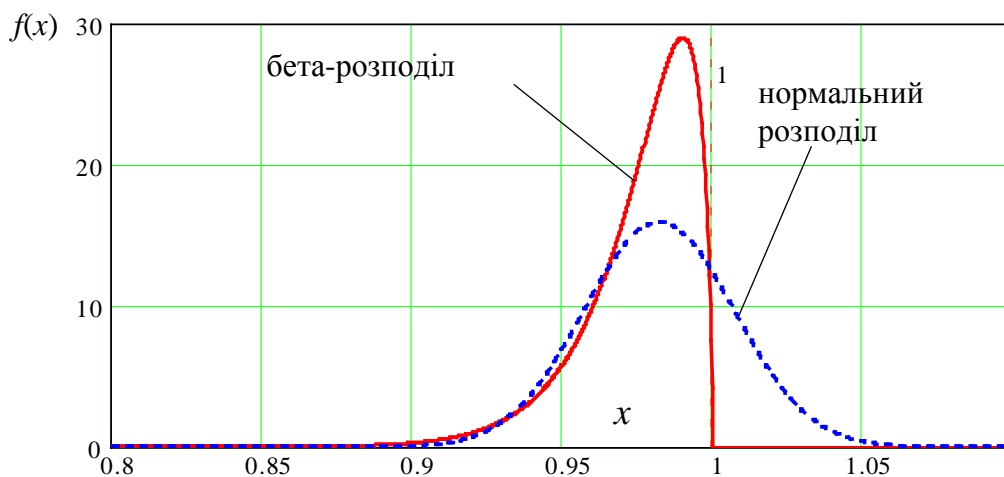


Рисунок 3.7 – Функція густини нормального і бета-розподілу оцінки надійності, які відповідають $\underline{P}_{c\gamma} = 0,95$ при $\gamma = 0,9$

Розподіл вимог до надійності у нижніх довірчих межах. У більшості випадків під час розв'язку задачі нормування вимог до надійності складових частин, підсистем і агрегатів ці вимоги необхідно задавати в тій же формі, що й вимога до надійності ТС у цілому. Таким чином, у разі встановлення необхідного рівня надійності ТС $\underline{P}_{c\gamma}^{(номр)}$, вимоги до надійності складових частин також слід задавати у вигляді нижніх довірчих меж. Для визначеності будемо розглядати ТС, яка представляється у вигляді послідовного з'єднання n складових частин (компонент). Надійність такої послідовної системи визначається в такий спосіб

$$P_c = \prod_{i=1}^n P_i, \quad (3.20)$$

де P_i – надійність i -того компонента ТС.

У випадку використання нормального розподілу для опису оцінки надійності ТС та її складових частин і використовуючи один і той самий рівень довіри γ відоме співвідношення, що зв'язує нижні довірчі межі надійності системи і її складових частин, яке має вигляд

$$\frac{P_{c\gamma}}{P_c} = P_c \left(1 - \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{P_{i\gamma}}{P_i} \right)^2} \right), \quad (3.21)$$

де $\frac{P_{i\gamma}}{P_i}$ – нижній довірчий рівень надійності для i -того компонента.

Співвідношення (3.20) з урахуванням (3.21) дозволяє встановлювати вимоги до надійності підсистем у вигляді нижніх меж. Однак при цьому необхідно узгодити нижні межі із точковими оцінками надійності окремих складових частин системи. Значне спрощення отримуємо у випадку рівномірного розподілу вимог до надійності підсистем і агрегатів: останнє співвідношення спроститься й прийме вигляд

$$\frac{P_{c\gamma}}{P^n} = 1 - \sqrt{n} \left(1 - \frac{P_{i\gamma}}{P} \right).$$

Використання інформаційного підходу дозволяє розв'язати задачу нормування надійності й безпосередньо призначити вимоги до нижніх меж надійності складових частин і агрегатів ТС. Нехай показники безвідмовності складових частин ТС описуються бета-розподілами (3.15) зі своїми параметрами (α_i, β_i) для $i = \overline{1, n}$. Відповідно

$$P_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}; \quad (3.22)$$

$$\sigma_{P_i}^2 = \frac{\alpha_i \beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2 (\alpha_i + \beta_i + 1)}. \quad (3.23)$$

У цьому випадку надійність ТС відповідно до (3.20) і (3.22) визначається в такий спосіб

$$P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad (3.24)$$

Середнє квадратичне відхилення оцінки надійності ТС визначимо за відомою формулою (отримати формулу, виходячи із методу лінеаризації)

$$\sigma_{P_c}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_c}{P_i} \right)^2 \sigma_{P_i}^2$$

або з урахуванням (3.24) і (3.23)

$$\sigma_{P_c}^2(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}{\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}} \right)^2 \frac{\alpha_i \beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2 (\alpha_i + \beta_i + 1)}. \quad (3.25)$$

У підсумку параметри бета-розподілу оцінки надійності ТС у цілому, визначаються з використанням формул

$$\alpha_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \left[\frac{P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) [1 - P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta})] - 1}{\sigma_{P_c}^2(\bar{\alpha}, \bar{\beta})} - 1 \right]; \quad (3.26)$$

$$\beta_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (1 - P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta})) \left[\frac{P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) [1 - P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta})] - 1}{\sigma_{P_c}^2(\bar{\alpha}, \bar{\beta})} - 1 \right], \quad (3.27)$$

де $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – вектори параметрів бета-розподілів оцінок надійності компонент ТС.

Для визначення значень векторів параметрів $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$ необхідно визначити максимум функції $H(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ за умови типу рівності (3.17).

Найбільш простий розв'язок розглянутої задачі виходить для рівномірного розподілу вимог до надійності, коли $P_i = P$ і відповідно $\alpha_i = \alpha$ і $\beta_i = \beta$ для $i = \overline{1, n}$. У цьому випадку задача нормування зводиться до пошуку значень усього лише двох параметрів α і β . При цьому для (3.24) і (3.25) маємо

$$P_c(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{P_c}^2(\alpha, \beta) = n \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{2(n-1)} \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}. \quad (3.29)$$

Приклад. Нехай система складається із трьох послідовно з'єднаних елементів. Вимоги до надійності системи задані на рівні $\underline{P}_{c,\gamma}^{(nomp)} = 0,95$ для $\gamma = 0,8$. Використовується рівномірний розподіл вимог до надійності на складові частини ТС. Шляхом розв'язання оптимізаційної задачі (3.16) з урахуванням обмеження (3.17) для кожного компонента ТС з урахуванням (3.26) - (3.29) знаходимо

$$P = 0,9894, \sigma = 0,0166, \underline{P}_\gamma = 0,983,$$

що забезпечує надійність для системи в цілому $P_c = 0,9686$ і $\sigma_{P_c} = 0,028$.

У число обмежень можуть бути включено вимоги до точкових оцінок надійності для деяких складових частин ТС. Їхня надійність може бути не нижче рівня, досягнутого для підсистем-аналогів. Таким чином, до обмеження (3.17) необхідно додати вимоги у вигляді

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} = P_i^* \quad (i \leq n),$$

де P_i^* – рівень надійності для i -тої складової частини ТС, досягнутий для підсистеми-аналога.

Якщо в умовах попереднього прикладу для 2 і 3 підсистеми є рівні надійності, досягнуті для підсистем-аналогів $P_2^* = 0,99$ і $P_3^* = 0,995$, то розв'язок оптимізаційної задачі призводить до наступних значень параметрів:

$$P_1 = 0,9833, \sigma_1 = 0,0195, \underline{P}_{1\gamma} = 0,9724,$$

$$\sigma_2 = 0,0165, \underline{P}_{2\gamma} = 0,984,$$

$$\sigma_3 = 0,013, \underline{P}_{3\gamma} = 0,9947.$$

При цьому, як і вище, отримані значення забезпечують надійність для системи в цілому $P_c = 0,9686$ і $\sigma_{P_c} = 0,028$, що відповідає даним таблиці 3.3.

Розглянуті приклади показали, що в обох випадках при визначенні вимог до надійності підсистем і агрегатів, одержуваний рівень надійності ТС відповідав значенню, яке виходить шляхом переходу (3.10). Таким чином, підхід з перезаданням вимог до надійності у вигляді (3.10) і нормування вимог стосовно до точкової оцінки надійності є цілком обґрунтованим і може бути рекомендований при проведенні практичних розрахунків.

Оптимальний розподіл вимог до надійності на складові частини у випадку, коли вимоги до системи задано у нижніх довірчих межах.

Припустимо, що вимоги до надійності ТС задано у вигляді $\underline{P}_{c\gamma}^{(nomp)}$ і при цьому

маємо дані щодо складових частин – аналогів – досягнуті рівні надійності та їх вартість. В цьому випадку може бути поставлено і вирішено задачу оптимального розподілу вимог до надійності на складові частини. Першим кроком є перехід до вимог надійності системи у вигляді точкової оцінки надійності та її середнього квадратичного відхилення (3.10), наприклад з використанням розв'язання оптимізаційної задачі (3.16), (3.17). Вважаємо, що показники безвідмовності складових частин ТС підпорядковуються бета-розподілам (3.15) зі своїми параметрами (α_i, β_i) для $i = \overline{1, n}$. Тепер задача оптимального розподілу вимог до надійності формулюється наступним чином (дивись (3.5), (3.6)) – треба забезпечити мінімум функції витрат

$$C = \sum_{i=1}^n -c_i \ln Q_i = \sum_{i=1}^n -c_i \ln \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) = \sum_{i=1}^n -c_i \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \rightarrow \min,$$

за наступних обмежень (дивись (3.24), (3.25))

$$\prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} = P_c;$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_c(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}{\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}} \right)^2 \frac{\alpha_i \beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2 (\alpha_i + \beta_i + 1)} = \sigma_{P_c}^2;$$

$$\alpha_i, \beta_i > 0.$$

Це задача нелінійного математичного програмування. Вона розв'язується числовими методами.

Розглянемо наступний приклад. Нехай вимоги до надійності РКП задано на рівні $\underline{P}_c^{(nomp)} = 0,95$ для $\gamma = 0,8$. Маємо чотири складові і для них таку інформацію (прив'язуючись до даних таблиці 3.2), що наведено в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6

Вихідні дані по складовим частинам – аналогам РКП

Підсистема	P_i^0	C_{0_i} , тис. умов. од.
1-ий ступінь (включно з системою відокремлення ступенів)	0,9636	1011,7
2-ий ступінь (включно з системою скидання ГАО та системою відокремлення РБ)	0,9703	571,3
РБ (включно з системою відокремлення КА)	0,9747	723,5
Система керування	0,9950	60,6

Точкова оцінка надійності та її середнє квадратичне відхилення, що відповідають $\underline{P}_c^{(nomp)} = 0,95$ і $\gamma = 0,8$ становлять $P_c = 0,977$ і $\sigma_{P_c} = 0,032$ відповідно (дивись таблицю 3.5). Розв'язуючи оптимізаційну задачу отримуємо дані, що наведено у таблиці 3.7.

Таблиця 3.7

Результати оптимального розподілу вимог до надійності складових частин РКП

Підсистема	α_i	β_i	P_i	σ_{P_i}
1-ий ступінь (включно з системою відокремлення ступенів)	25,03	0,264	0,9896	0,02
2-ий ступінь (включно з системою скидання ГАО та системою відокремлення РБ)	18,023	0,101	0,9944	0,017
РБ (включно з системою відокремлення КА)	17,912	0,122	0,9932	0,019
Система керування	18,158	0,007	0,9996	0,005

3.4 Особливості розподілу вимог до надійності для КА

На КА (або іншу систему тривалого функціонування) у ТЗ зазвичай встановлюється гама-відсотковий термін активного існування (роботи). Відповідно цього виникає задача, яким чином перерозподілити цю вимогу на складові частини КА (підсистеми, вузли та агрегати). Один з варіантів - встановлення вимог до безвідмовності складових частин відповідно до матеріалу представленого вище. Проте, оскільки на систему вимоги встановлено у вигляді t_γ , логічно, що і вимоги до підсистем слід задавати у вигляді гамма-відсоткового ресурсу роботи. Розглянемо послідовну систему, що складається з n елементів. Тут можливо два варіанти нормування:

1. Для системи та її підсистем встановлено однакове значення імовірності $\gamma = \gamma_c = \gamma_i$ ($i = \overline{1, n}$). Відповідно потрібно визначити ресурс (час) для складових підсистеми t_{γ_i} для встановлених (заданих) γ_i ;
2. Для системи та її підсистем встановлено однакове значення гамма відсоткового ресурсу $t_{\gamma_i} = t_{\gamma_c}$ (тобто час) і при цьому відомо γ_c . Треба визначити (задати) γ_i ($i = \overline{1, n}$).

Розглянемо перший випадок. Для схеми послідовного з'єднання елементів надійність визначається за формулою

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t). \quad (3.30)$$

Таким чином

$$P_c(t_{\gamma_c}) = \prod_{i=1}^n P_i(t_{\gamma_c}) = 0.01\gamma.$$

При цьому для кожного елемента системи маємо

$$P_i(t_{\gamma_i}) = 0.01\gamma. \quad (3.31)$$

Оскільки праві частини співвідношень (3.30) и (3.31) дорівнюють одне одному, можемо записати

$$\prod_{i=1}^n P_i(t_{\gamma_c}) = P_i(t_{\gamma_i}), \text{ для } i = \overline{1, n}$$

Останнє співвідношення пов'язує t_{γ_c} і t_{γ_i} . Припускаючи рівнонадійність елементів, тобто $P_i(t) = P(t)$, далі записуємо

$$[P(t_{\gamma_c})]^n = P(t_{\gamma_i}).$$

Як приклад розглянемо експоненційний розподіл часу до відмови елементів

$$e^{-n\lambda t_{\gamma_c}} = e^{-\lambda t_{\gamma_i}},$$

звідкіля

$$nt_{\gamma_c} = t_{\gamma_i}.$$

Розглянемо інший випадок. Для нього для послідовної схеми маємо

$$P_c(t_{\gamma_c}) = \prod_{i=1}^n P_i(t_{\gamma_c}) = \prod_{i=1}^n P_i(t_{\gamma_i}) = 0.01\gamma_c. \quad (3.32)$$

З іншого боку

$$P_i(t_{\gamma_i}) = 0.01\gamma_i \text{ (} i = \overline{1, n} \text{)}.$$

Таким чином, підставляючи останній вираз в (3.32), отримаємо зв'язок між γ_i і γ_c

$$\prod_{i=1}^n 0.01\gamma_i = 0.01\gamma_c.$$

У припущенні $\gamma_i = \gamma$, отримуємо

$$(0.01\gamma)^n = 0.01\gamma_c$$

і далі

$$\gamma = \frac{(0.01\gamma_c)^{\frac{1}{n}}}{0.01}.$$

Наприклад, якщо система складається з $n = 5$ елементів і для системи встановлено значення $\gamma_c = 80\%$, тоді

$$\gamma = \frac{(0.8)^{\frac{1}{5}}}{0.01} \approx 95.7\% .$$

Тема 4

ІМОВІРНІСНИЙ ОПИС ПАРАМЕТРІВ РАКЕТНО-КОСМІЧНИХ СИСТЕМ

4.1 Три типи параметрів в моделях працездатності.

Сукупність вхідних фізичних параметрів \bar{X} у моделях працездатності прийнято поділяти на три групи:

$$\bar{X} = \bar{X}^{(1)} \cup \bar{X}^{(2)} \cup \bar{X}^{(3)},$$

де $\bar{X}^{(1)}$ – сукупність фізичних параметрів, що характеризують вплив навколишнього середовища на об'єкт (навантаження); $\bar{X}^{(2)}$ – внутрішні параметри об'єкта, що характеризують фізичні процеси, що протікають у МС при функціонуванні об'єкта (фізико-механічні характеристики); $\bar{X}^{(3)}$ – параметри, що характеризують зовнішній вигляд об'єкта проектування (геометричні розміри елементів, топологічні параметри).

Такий поділ дозволяє показати ступінь впливу проектанта на вихідні параметри (первинні змінні). Навантаження це тип параметрів, на який проектант може вплинути лише в дуже незначній мірі, наприклад, обмежити навантаження певними значеннями. Більшого впливу маємо для фізико-механічних характеристик. І найбільшим чином проектант може впливати на конструктивні параметри системи, що проектується.

4.2 Нормальний розподіл

Вперше нормальний розподіл як межа біноміального розподілу при $p = \frac{1}{2}$ з'явилося 1738 року у другому виданні роботи Муавра «Доктрина випадковостей». Воно широко поширене для опису різноманітних природних процесів.

Важливим є нормальний розподіл для різних технічних додатків. Досить лише згадати те, що в даний час майже всі методи математичної статистики виходять із припущення нормальності ВВ. Більшість використовуваних на практиці моделей надійності МС, у тому числі й у ракетній техніці, засновані на нормальному розподілі. Воно широко застосовується і для опису різних параметрів і характеристик.

Широке застосування нормального розподілу в технічних задачах можна пояснити щонайменше двома основними причинами. По-перше, багато параметрів і характеристик ТС дійсно підпорядковуються нормальному розподілу. Цей факт має серйозну методологічну основу. Справа в тому, що припущення про те, що будь-який вихідний параметр може розглядатися як деяка сума вхідних(первинних) параметрів, дає певні підстави застосовувати центральну граничну теорему. Центральна гранична теорема (сформульована Лапласом) стверджує, що випадкова величина підпорядковується розподілу, близькому до нормального, коли вона є результатом впливу великої кількості незалежних і близьких за рівнем впливу вхідних випадкових факторів. Тому

нормальний розподіл є хорошою моделлю для багатьох реальних фізичних процесів.

Друга причина успіху нормального розподілу обумовлена порівняльною простотою його використання, оскільки є велика кількість таблиць і номограм, що дозволяють швидко і точно визначати необхідні характеристики. Наслідком розглянутих причин є те, що при виборі закону розподілу різноманітних характеристик і параметрів гіпотеза нормальності розподілу у ряді випадків приймається без достатнього обґрунтування.

Дамо деякі основні властивості нормального розподілу [2,10,11,18].

Нормальний розподіл залежить від двох параметрів: математичного сподівання – «центр ваги» розподілу та дисперсії, що характеризує ступінь розкиду випадкової величини відносно математичного сподівання. Густина нормального розподілу має вигляд

$$f(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.1)$$

Стандартним нормальним розподілом називається нормальний розподіл із математичним сподіванням стандартним відхиленням σ . Функція розподілу (функція Лапласа, рис. 4.1) має вигляд

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (4.2)$$

З функцією Лапласа пов'язаний так званий інтеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Обидва зазначені інтеграли не виражаються в елементарних функціях і належать до спеціальних функцій.

Визначити імовірність того, що ВВ лежить в інтервалі $[a, b]$ можна по формулі

$$\Pr[X \in [a, b]] = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Найбільш імовірні значення нормальної випадкової величини розташовані поблизу піка густини. У міру віддалення від нього, імовірність отримання значень зменшується і якщо значення розташоване в «хвості» розподілу, то воно дуже малоймовірно.

Правило «трьох сігм» - практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини (а саме 99,73%) лежать в інтервалі $[\sigma; \sigma]$. Розподіл частки спостережень, які відповідають нормальній сукупності,

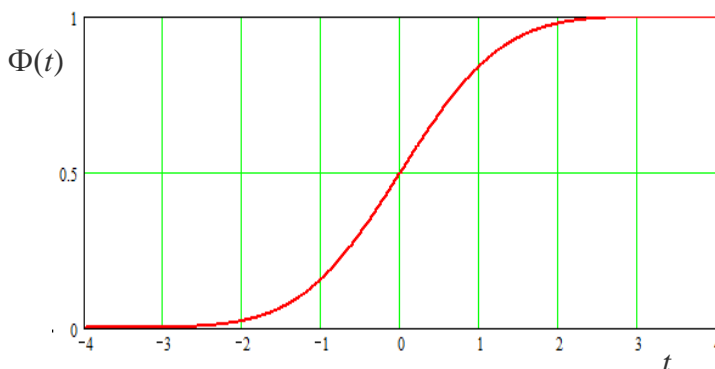
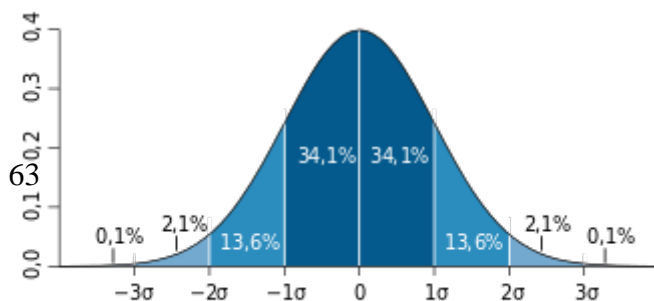


Рисунок 4.1 – Функція Лапласа



у межах інтервалу $\pm\sigma, \pm2\sigma; \pm3\sigma$ показаний на рис. 4.2.

Нормальний розподіл є нескінченно ділимим. Якщо випадкові величини i незалежні й мають нормальний розподіл з математичними сподіваннями i і дисперсіями σ_1^2 й σ_2^2 відповідно, то випадкова величина, що представляє також має нормальний розподіл з математичним сподіванням рівним i дисперсією, яка дорівнює $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Звідси випливає, що нормальну ВВ можна представити як суму довільного числа незалежних нормальних ВВ.

Рисунок 4.2 – Кількість спостережень, які попадають в певні інтервали

4.3 Параметри, що характеризують відхилення розподілу ВВ від нормального

Незважаючи на значне поширення нормального розподілу, багато параметрів й характеристик в природі і техніці мають відмінні від нормального розподіли. Як визначити відхилення розподілу від нормального? У більшості випадків відхилення розподілу від нормального характеризується з використанням коефіцієнтів асиметрії (зкошеності) і гостровершинності (ексцесу) [2, 10, 11, 19].

Коефіцієнт асиметрії (зкошеності) – величина, що характеризує асиметрію розподілу ВВ. Коефіцієнт асиметрії визначається через третій центральний момент

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (4.3)$$

де $\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^3 f(x) dx$ – третій центральний момент розподілу $f(x)$.

Коефіцієнт асиметрії додатний (див. рис. 4.3), якщо правий хвіст розподілу довші за лівий, і негативний у протилежному випадку. Якщо розподіл симетричний відносно математичного сподівання, то його коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю (для нормального розподілу неважко встановити рівність нулю третього центрального моменту і відповідно коефіцієнту зкошеності (перевірити самостійно)).

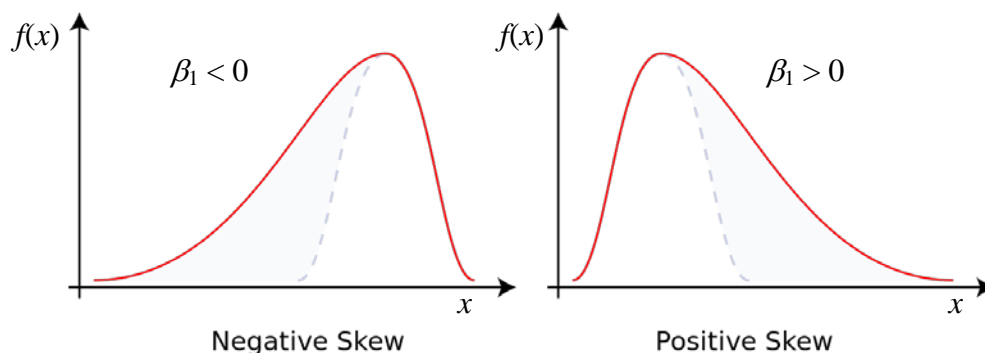


Рисунок 4.3 – Різні форми зкошеності розподілу

Розуміння асиметрії вказує на те, чи будуть відхилення від середнього в більшості позитивними або негативними.

Коефіцієнт ексцесу (коефіцієнт гостровершинності) в теорії імовірності – міра гостроти піка розподілення випадкової величини. Він визначається наступним чином

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad (4.5)$$

де $\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^4 f(x) dx$ – четвертий центральний момент розподілу $f(x)$.

При визначенні коефіцієнту ексцесу «мінус три» в кінці формули введено для того, щоб коефіцієнт ексцесу стандартного нормального розподілу дорівнював нулю. Він додатний, якщо пік розподілу біля математичного сподівання гострий, й від'ємний, якщо пік дуже притуплений. На рис. 4.4 показано приклади розподілів з різним значенням коефіцієнту ексцесу

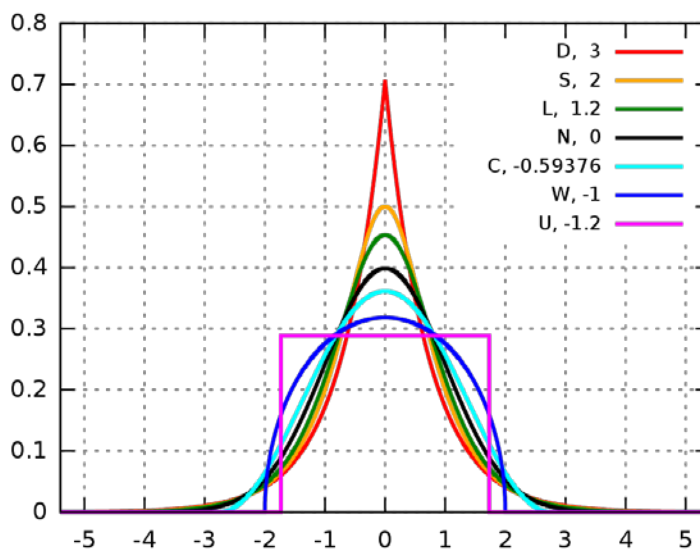


Рисунок 4.4 - Розподіли з різним ексцесом

4.4 Результати статистичних досліджень параметрів й характеристик ракетних систем (одномірний випадок)

Протягом декількох років проводилася обробка статистичних рядів параметрів і характеристик ракетних систем, які охоплювали практично все різноманіття систем РКП/РН. Дослідження включали: параметри РРД і систем живлення, зафіксовані в процесі стендових і льотних випробувань; геометричні й механічні характеристики паливних відсіків, балонів і магістральних трубопроводів; балістичні характеристики (стартові, кінцеві й "сухі" маси, кінцеві швидкості, швидкості поділу); характеристики стану атмосфери в точці старту; конструктивно-технологічні характеристики окремих вузлів і агрегатів, отримані в процесі складальних робіт; характеристики вузлів і агрегатів ракети (гідроприводів, блоків клапанів, систем поділу); фізико-механічні характеристики матеріалів конструкцій. Було досліджено більш ніж 300

одновимірних статистичних рядів з обсягом вибірових даних, що в більшості перевищують 50 спостережень (для більшої частини вибірок кількість спостережень становила 200 - 300).

Дослідження одновимірних статистичних сукупностей проводилося на якісному і кількісному рівні. Якісний аналіз статистичних даних був пов'язаний з побудовою гістограм розподілів і аналізом форм кривих. Кількісний аналіз включав вивчення поведінки коефіцієнтів асиметрії й ексцесу.

Форми розподілів параметрів ракетних систем. Як показали проведені дослідження, форми розподілів характеристик і параметрів ракетних систем досить різноманітні. Проте, серед них можна виділити деякі типи: симетричні, квазісиметричні форми, додатно й від'ємно зкошені, двовершинні, тривершинні. Наведені на рис. 4.5 криві, що досить повно характеризують спостережуване різноманіття форм кривих густин статистичних рядів параметрів ракетних систем механічного типу. Зазначені форми з деякими відхиленнями характерні для кожної із зазначених вище груп фізичних параметрів.

Загальні результати якісної обробки статистичних сукупностей наведено в таблиці 4.1.

Одновершинні розподіли мають переважне поширення (до 80 %). Проте, на практиці доводиться зважати на те, що кожний п'ятий параметр має полімодальний розподіл (кілька піків).

Було виявлено, що геометричні, об'ємні й масові характеристики мають більшу схильність до симетричних розподілів. Для інших параметрів і характеристик (у межах одномодальних форм) відстежується практично рівне співвідношення між трьома альтернативами: симетричними формами, додатно й від'ємно зкошеними. Встановлено, що серед симетричних розподілів приблизно п'ята частина має істотний за значенням ексцес. Для несиметричних розподілів цей відсоток вище й досягає 30 %, а в певних випадках і 50 %.

Дослідження коефіцієнтів асиметрії й ексцесу. Було виявлено, що для одновершинних розподілів лише третина параметрів підпорядковується нормальним законам розподілу. Якщо до них додати певну кількість розподілів зі слабкою й помірною асиметрією й гостровершинністю ($|\beta_1|, |\beta_2| \in [0,1; 0,3]$), то частка статистичних рядів, для яких можлива нормальна апроксимація, зростає до 40 – 45 %.

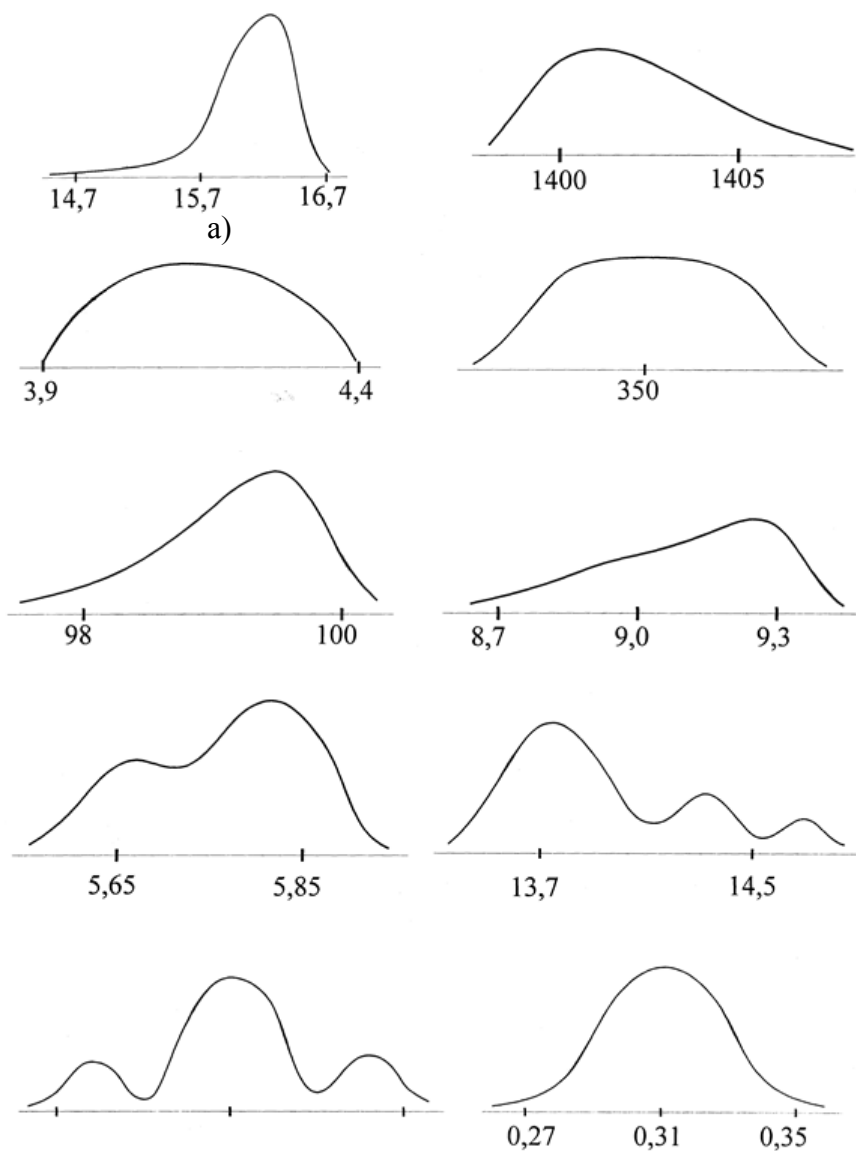


Рисунок 4.5 – Форми розподілів параметрів ракетних систем: а) тиск на виході клапана (МПа); б) діаметр корпусу ракетного двигуна твердого палива (мм); в) маса залишків незабору компонента палива (кг); г) питома тяга у порожнечі (с); д) діаметр шнека насоса пального (мм); е) товщина теплозахисного покриття (мм); об'єм балона (м^3); ж) питома вага окисника ($\text{КН}/\text{м}^3$); з) тиск у колекторі (МПа); і) масова витрата окисника у газогенераторі (кг/с).

Таким чином, за результатами проведених статистичних досліджень було виявлено, що значна частка досліджених параметрів має явно виражену відмінність від нормального випадку.

Таблиця 4.1

Підсумки обробки одномірних статистичних сукупностей

Характеристики		Загальна кількість рядів	Кількість рядів за видами розподілів								
			Одноmodalьні					Поліmodalьні			
			Асиметричні				Симетричні		Симетричні	Позитивно асиметричні	Негативно асиметричні
			Позитивно		Негативно		Ех \approx 0 (квазінор- мальне)	Ех істотно відрізняються від 0			
Істотно	Слабко	Істотно	Слабко								
Геометричні	46	10	6	8	3	10	2	1	4	2	
		27				12		7			
		39									
Об'ємні	14	2	1	1	1	5	1	-	1	2	
		5				6		3			
		11									
Масові	58	7	5	6	8	20	2	1	4	5	
		26				22		10			
		48									
Тиску	71	11	3	12	9	13	3	5	9	6	
		35				16		20			
		51									
Герметичності	8	6	1	-	-	-	-	-	-	1	
		7				0		1			
		7									
Міцності	30	6	4	3	2	8	1	4	1	1	
		15				9		6			
		24									
Питома тяга	10	2	1	1	1	2	2	1	-	-	
		5				4		1			
		9									
Співвідношення компонентів	16	2	1	2	1	7	-	-	3	-	
		6				7		3			
		13									
Інші (тяга, потужність, оберти, витрати)	23	4	2	4	3	5	2	-	2	1	
		13				7		3			
		20									
Гідроприводи	9	1	2	1	1	2	-	-	1	1	
		5				2		2			
		7									
Температурні	6	2	-	-	1	1	1	1	-	-	
		3				2		1			
		5									
ЗАГАЛОМ	291	53	26	38	30	73	14	13	25	19	
		147				87		57			
		234									

4.5 Способи опису, відмінних від нормальної, випадкових величин

Розглянемо розподіли, що в практичних задачах можуть бути використані для опису ВВ, які відрізняються від нормального випадку.

4.5.1 Одновимірні розподіли

Системи розподілів Пірсона й Джонсона

Сімейство розподілів Пірсона [10,11]. Розподіли системи Пірсона визначаються за допомогою диференціального рівняння виду

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(x-a)}{b_0 + b_1x + b_2x^2} f(x), \quad (4.6)$$

де $f(x)$ – густина розподілу; a, b_0, b_1, b_2 – параметри розподілу.

З рівняння (4.6) випливає, що точка a є модою розподілу (пік розподілу).

Сімейство розподілів (4.6) охоплює всю область можливих значень коефіцієнтів зкошеності й ексцесу, включно із J і U-образними формами. Вирази для густини розподілів отримуємо шляхом інтегрування диференціального рівняння (4.6). Розрізняють сім основних типів розподілів Пірсона (див. таблицю 4.2), які визначаються відповідно до критерію Пірсона

$$\mathfrak{e} = \frac{\rho_3^2(\rho_4 + 3)^2}{4(4\rho_4 - 3\rho_3^2)(2\rho_4 - 3\rho_3^2 - 6)}.$$

Дані таблиці 4.2 свідчать про широку різноманітність форм розподілів, одержуваних із (2.1). Вони включають як досить складні розподіли, такі як тип IV, використання якого вимагає застосування спеціальних таблиць або чисельних методів, так і відносно прості (типу VII). Деякі розподіли системи Пірсона можуть бути шляхом заміни перемінних приведені один до одного. Так розподіл VI, шляхом заміни перемінних приводиться до I типу. У цілому ж необхідно сказати, що в практичних завданнях використовуються всього лише 2-3 розподіли системи.

Таблиця 4.2

Розподіли системи Пірсона

Тип	Вид функції густини	Область зміни	Області значень параметрів	Значення критерію Пірсона
I	$\frac{1}{(b-a)^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1, \beta+1)} (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$	$[a, b]$	$\alpha > -1,$ $\beta > -1$	$\mathfrak{e} < 0$
II	$\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{a\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^\alpha$	$[-a, a]$	$\alpha > -1,$ $a > 0$	$\mathfrak{e} = 0,$ $\rho_3 = 0,$ $\rho_4 < 3$
III	$\frac{a^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^\alpha \exp\left[-\alpha\left(1 + \frac{x}{a}\right)\right]$	$[-a, \infty]$	$\alpha > -1$ $a > 0$	$\mathfrak{e} = \pm\infty$
IV	$\frac{\Gamma\left(\frac{2\alpha+i\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\alpha-i\beta}{2}\right)}{a\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-0,5)} \left[1 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{-\alpha} e^{-\beta \cdot \arctg \frac{x}{a}}$	$(-\infty, \infty)$	$a > 0$ $\alpha \geq 1$	$0 < \mathfrak{e} < 1$

V	$\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} x^{-\alpha} e^{-\frac{\lambda}{x}}$	$[0, \infty]$	$\lambda > 0,$ $\alpha > 1$	$\alpha = 1$
VI	$\frac{a^{\alpha-\beta-1} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta-1) \Gamma(\beta+1)} x^{-\alpha} (x-a)^\beta$	$[a, \infty]$	$a > 0$	$1 < \alpha < \infty$
VII	$\frac{\Gamma(\alpha)}{a\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-0,5)} \left[1 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{-\alpha}$	$(-\infty, \infty)$	$a > 0$	$\alpha = 0,$ $\rho_3 = 0,$ $\rho_4 > 3$

Сімейство розподілів Джонсона [10,19]. Система розподілів Джонсона будується з використанням наступного загального перетворення нормованої нормальної ВВ

$$\frac{y-\gamma}{\delta} = g(x; \mu, \lambda), \quad (4.7)$$

де y – нормована нормальна випадкова величина; x – випадкова величина, для якої необхідно підібрати розподіл; $g(\bullet)$ – якась монотонна функція; γ, μ – параметри зсуву; δ, λ – параметри масштабу. Джонсон запропонував три різні типи функцій, що визначають відповідні сімейства кривих

$$g(x; \mu, \lambda) = \ln\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right), \quad x \geq \mu;$$

$$g(x; \mu, \lambda) = \ln\left(\frac{x-\mu}{\lambda + \mu - x}\right), \quad \mu \leq x \leq \mu + \lambda;$$

$$g(x; \mu, \lambda) = \operatorname{arcsch}\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right), \quad -\infty \leq x \leq \infty.$$

Для зазначених функцій $g(\bullet)$ утворюються наступні густини розподілу:

- S_L розподіл Джонсона (логарифмічно нормальний розподіл)

$$f(x; \gamma, \delta, \mu, \lambda) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}(x-\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \delta \ln\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)\right]^2\right\} \quad (4.8)$$

для $x \geq \mu$;

- S_b розподіл Джонсона

$$f(x; \gamma, \delta, \mu, \lambda) = \frac{\delta\lambda}{\sqrt{2\pi}(x-\mu)(\lambda-x+\mu)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \delta \ln\left(\frac{x-\mu}{\mu-x+\lambda}\right)\right]^2\right\} \quad (4.9)$$

для $x \in [\mu, \mu + \lambda]$;

- S_U розподіл Джонсона

$$f(x; \gamma, \delta, \mu, \lambda) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(x-\mu)^2 + \lambda^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \delta \ln\left(\frac{x-\mu}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2 + 1}\right)\right]^2\right\} \quad (4.10)$$

для $-\infty \leq x \leq \infty$.

Розподіли Джонсона можуть приймати різноманітні форми і є чотирьохпараметричними (крім логнормального, яке шляхом заміни змінної трансформуються у трьохпараметричний вигляд). У сукупності вони також як і розподіли системи Пірсона покривають усю область можливих значень скосу й ексцесу. Однак, практичне використання розподілів Джонсона пов'язане з певними труднощами вибору тієї або іншої форми для опису ВВ, особливо якщо є тільки числові характеристики випадкової величини за якими необхідно відновити розподіл. Вибір необхідної кривої сімейства розподілів Джонсона здійснюється з використанням діаграми (рис. 4.6). Крива, що визначає логнормальний розподіл, визначається сукупністю наступних параметричних рівнянь

$$\beta_1 = (\omega^2 - 1)(\omega^2 + 2)^2,$$

$$\beta_2 = (\omega^2 - 1)(\omega^6 + 3\omega^4 + 6\omega^2 + 6) + 3,$$

де $\omega = \exp\left(\frac{1}{2\delta^2}\right)$.

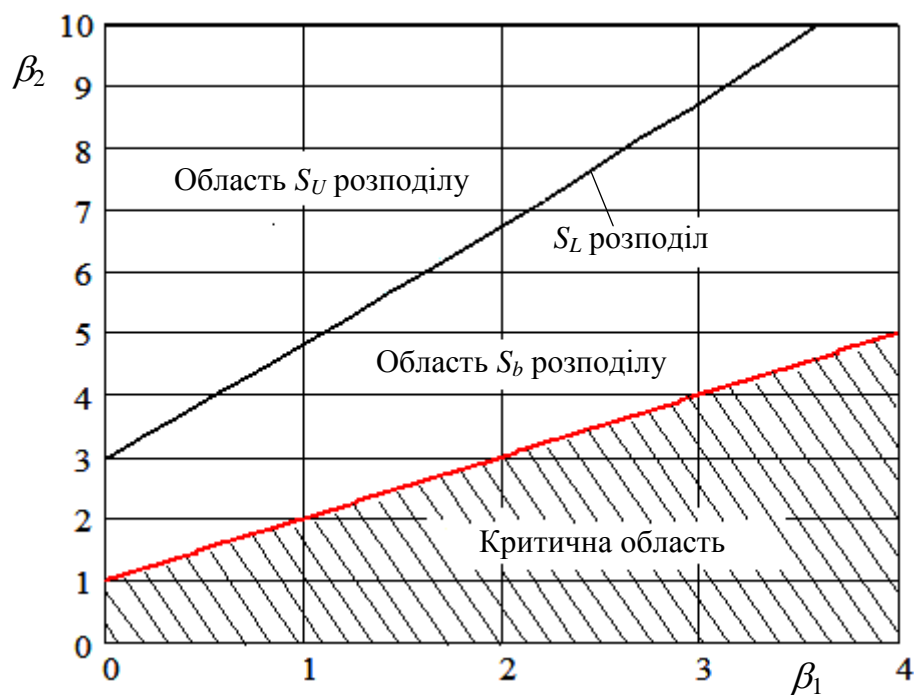


Рисунок 4.6 - Области використання розподілів Джонсона.

Розподіли систем Пірсона й Джонсона знайшли широке розповсюдження для опису статистичних сукупностей. Для їхньої підгонки використовується метод моментів і метод квантилей. Згідно методу моментів для чотирьохпараметричного розподілу знайдені за статистичними даними значення вибірових математичного сподівання, середнього квадратичного відхилення, коефіцієнтів зкошеності і гостровершинності прирівнюються до виразів цих числових характеристик, отриманих через параметри розподілу.

Одновимірний розподіл Грама-Шарльє

Універсальним розподілом, який теоретично дозволяє працювати з різними значеннями коефіцієнтів зкошеності й ексцесу й описувати широке коло ВВ є розподіл Грам-Шарльє. У деякому сенсі його можна вважати класичним, нарівні з нормальним (вважається, що деформація нормального розподілу), і питання його побудови можна знайти практично в будь-якій книзі по теорії ймовірностей [10,11,12].

Розподіл Грам-Шарльє заснований на розкладанні невідомої функції густини за ортогональними поліномами Чебишева-Ерміта, вагова функція яких являє собою функцію нормальної густини

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Загальне співвідношення для ортогональних поліномів Чебишева-Ерміта записується наступним чином

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Зокрема, вирази для перших п'яти ортогональних поліномів Чебишева-Ерміта мають вигляд:

$$H_0(x) = 1;$$

$$H_1(x) = x;$$

$$H_2(x) = x^2 - 1;$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x;$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

Розкладання невідомої функції густини в ряд по ортогональним поліномам Чебишева-Ерміта записують в такий спосіб

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \frac{d^k N(x)}{dx^k}, \quad (4.11)$$

де $N(x)$ – густина стандартного нормального розподілу; c_k – коефіцієнт розкладання.

Коефіцієнти розкладання визначаються, виходячи з властивості ортогональності поліномів Чебишева-Ерміта, що має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(x) H_j(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dz = \begin{cases} \sqrt{2\pi i!}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для цього праву і ліву частину (4.11) домножують на поліноми Чебишева-Ерміта $H_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) і інтегрують. Перші п'ять коефіцієнтів розкладання визначаються наступним чином

$$c_0 = 1, c_1 = c_2 = 0, c_3 = \frac{\beta_1}{3!}, c_4 = \frac{\beta_2}{4!}.$$

Часткова сума ряду (4.11) (до четвертого порядку включно) називається розподілом Грама-Шарльє. Функція густини останнього для нормованої випадкової величини записуються у вигляді

$$hc(x) = \left\{ 1 + \frac{\beta_1}{3!}(x^3 - 3x) + \frac{\beta_2}{4!}(x^4 - 6x^2 + 3) \right\} N(x). \quad (4.12)$$

Таким чином, для побудови розподілу Грама-Шарльє потрібні числові характеристики β_1 і β_2 .

Функцію розподілу Грама-Шарльє отримуємо інтегруванням (4.12)

$$HC(t) = \int_{-\infty}^t hc(x) dx = \Phi(t) - \left[\frac{\beta_1}{3!} H_2(t) + \frac{\beta_2}{4!} H_3(t) \right] N(t). \quad (4.13)$$

Незважаючи на те, що розподіл Грама-Шарльє досить часто зустрічається в літературі, питання його використання висвітлюються рідше. Справа у наступному: функція густини розподілу Грама-Шарльє при певних значеннях коефіцієнтів асиметрії й гостровершинності схильна до виходу у від'ємну область (так звані від'ємні «хвости») і утворенню більш однієї моди (полімодальність). Це призводить до того, що функція розподілу Грама-Шарльє не є монотонно-зростаючою. Таким чином, область використання розподілу Грама-Шарльє визначається двома умовами:

- відсутністю виходів густини розподілу у від'ємній області (тобто $hc(x) > 0$ для $-\infty \leq x \leq \infty$),
- крива густини розподілу повинна мати одну моду (рівняння $hc'(x) = 0$ повинне мати один корінь).

Область використання розподілу Грама-Шарльє з урахуванням двох умов, розглянутих вище, наведено на рис 4.7.

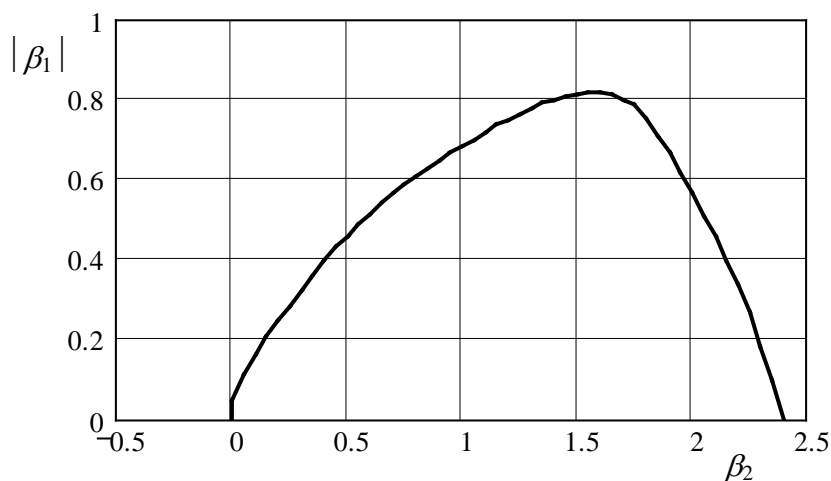


Рисунок 4.7 - Область відсутності від'ємних «хвостів» й полімодальності розподілу Грама-Шарльє.

Отже, практичне застосування розподілу Грама-Шарльє визначається областю, яку показано на рисунку 4.7.

Завдання для самостійної роботи

1. Отримати ймовірність того, що ВВ, яка має розподіл Грама-Шарльє (4.12), опиниться в інтервалі $[a, b]$.

Узагальнений лямбда-розподіл

Перспективним універсальним чотирьохпараметричним розподілом, який знайшов широке застосування для обробки статистичних даних, є узагальнений лямбда-розподіл. Він визначається через квантильну функцію $Q(u)$ для $0 \leq u \leq 1$, яка представляє собою функцію зворотну функції розподілу $F(x)$ деякої ВВ, так що

$$F \equiv Q^{(-)}.$$

Найбільш розповсюдженим є наступний вираз для квантильної функції [21]

$$Q(u) = \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

де λ_1 – параметр положення, λ_2 – параметр масштабу, λ_3, λ_4 – параметри форми. З очевидної тотожності

$$Q(F(x)) = x,$$

утворюється рівняння, яке в неявній формі визначає функцію розподілу

$$x = \lambda_1 + \frac{F(x)^{\lambda_3} - (1-F(x))^{\lambda_4}}{\lambda_2}.$$

Виходячи з останнього співвідношення, функція розподілу може бути задана в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \\ F(x) = u \end{cases} \quad (4.14)$$

Використовуючи правило диференціювання зворотної функції $f(x) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial F} Q(F)}$, можна отримати функцію густини розподілу, яка в

параметричному вигляді записується наступним чином

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \\ f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 u^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4-1}} \end{cases} \quad (4.15)$$

Розподіл (4.15) має суттєву гнучкість й може давати як симетричні (у випадку $\lambda_3 = \lambda_4$), так і асиметричні (в іншому випадку) форми. В якості прикладу в таблиці 2.4 наведено криві узагальненого лямбда розподілу для нормованої ВВ с нульовим ексцесом.

Узагальнені лямбда розподіли, які описують нормовану
ВВ ($m = 0$; $\sigma = 1$) з нульовим ексцесом ($\beta_2 = 0$)

β_1	Значення параметрів (4.15)	Форма кривої густини
0,0	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1,463552$ $\lambda_3 = 0,134912$ $\lambda_4 = 0,134912$	
0,2	$\lambda_1 = -0,043972$ $\lambda_2 = 1,435801$ $\lambda_3 = 0,192576$ $\lambda_4 = 0,109071$	
0,4	$\lambda_1 = -0,099284$ $\lambda_2 = 1,349023$ $\lambda_3 = 0,302558$ $\lambda_4 = 0,109069$ $(a = -2,549$ $b = 5,154)$	
0,6	$\lambda_1 = -0,187656$ $\lambda_2 = 1,189777$ $\lambda_3 = 0,52789$ $\lambda_4 = 0,139256$ $(a = -1,78$ $b = 5,154)$	
0,7	$\lambda_1 = -0,262248$ $\lambda_2 = 1,07246$ $\lambda_3 = 0,748651$ $\lambda_4 = 0,172168$ $(a = -1,508$ $b = 5,154)$	
0,8	$\lambda_1 = -0,3922$ $\lambda_2 = 0,912691$ $\lambda_3 = 1,194536$ $\lambda_4 = 0,229053$ $(a = -1,309$ $b = 5,154)$	

Примітка: a, b – межі зміни ВВ

Зауважимо, що в області нульових ексцесів при $\beta_1 > 0,75$ цей розподіл набуває J образну форму. Таку ж форму він має при значних коефіцієнтах скосу й у випадку відмінних від нуля ексцесів. Якщо $\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$, тоді узагальнений лямбда розподіл має обмежений інтервал варіювання $[\lambda_1 - \lambda_2^{-1}, \lambda_1 + \lambda_2^{-1}]$. Тем не менш, він може успішно апроксимувати розподіли навіть з необмеженими областями зміни. Наприклад, для $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,1975$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0,1349$ розподіл (4.15) незначно відрізняється від стандартного нормального розподілу (див. п.1 таблиці 2.4). У разі коли $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$, узагальнений лямбда розподіл має необмежену область зміни.

Існують обмеження на використання узагальненого лямбда-розподілу. Наприклад, враховуючи, що функція густини повинна бути позитивно визначеною на усій області варіювання, для (4.15) необхідне виконання наступної умови

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3 u^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4-1}} \geq 0.$$

Область використання узагальненого лямбда-розподілу показана на рис. 4.8 і вона значно ширше, ніж у розподілу Грама-Шарльє.



Рисунок 4.8 – Область застосування узагальненого лямбда-розподілу

На сьогоднішній момент відомо кілька способів визначення значень параметрів λ_i . Серед них одним з найпоширеніших способів визначення параметрів (4.15) є метод моментів. Пояснюється це тим, що з використанням квантильної функції, можна відносно легко одержати вирази для початкових моментів розподілу

$$\alpha_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) = \left\{ \begin{array}{l} u = F(x) \\ du = dF(x) \\ x = Q(u) \end{array} \right\} = \int_0^1 (Q(u))^k du. \quad (4.16)$$

Застосування методу моментів зводить задачу визначення параметрів λ_i ($i = \overline{1, 4}$) до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, які отримано з (4.16). Для квантильної функції визначаються так звані нецентральні моменти до 4-го порядку включно:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\lambda_3 + 1} - \frac{1}{\lambda_4 + 1}; \\
v_2 &= \frac{1}{2\lambda_3 + 1} + \frac{1}{2\lambda_4 + 1} - 2B(\lambda_3 + 1, \lambda_4 + 1); \\
v_3 &= \frac{1}{3\lambda_3 + 1} - \frac{1}{3\lambda_4 + 1} - 3B(2\lambda_3 + 1, \lambda_4 + 1) + 3B(\lambda_3 + 1, 2\lambda_4 + 1); \\
v_4 &= \frac{1}{4\lambda_3 + 1} + \frac{1}{4\lambda_4 + 1} + 6B(2\lambda_3 + 1, 2\lambda_4 + 1) - \\
&\quad - 4B(3\lambda_3 + 1, \lambda_4 + 1) - 4B(\lambda_3 + 1, 3\lambda_4 + 1),
\end{aligned}$$

де $B(\bullet, \bullet)$ – бета-функція.

Перехід до центральних моментів здійснюється за формулами

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \frac{1}{\lambda_2^2} (v_2 - v_1^2); \\
\mu_3 &= \frac{1}{\lambda_2^3} (v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3); \\
\mu_4 &= \frac{1}{\lambda_2^4} (v_4 - 4v_1v_2 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4).
\end{aligned}$$

У підсумку для коефіцієнтів скосу й ексцесу можна записати вираз як функції тільки двох параметрів λ_3, λ_4

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3}{(v_2 - v_1^2)^{\frac{3}{2}}} = G_3(\lambda_3, \lambda_4); \\
\beta_2 &= \frac{v_4 - 4v_1v_2 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4}{(v_2 - v_1^2)^2} - 3 = G_4(\lambda_3, \lambda_4).
\end{aligned}$$

Нехай тепер нам відомі чисельні характеристики випадкової величини: m, σ, β_1 і β_2 . Значення параметрів λ_3, λ_4 для відомих β_1 і β_2 можуть бути отримані шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} G_3(\lambda_3, \lambda_4) = \beta_1 \\ G_4(\lambda_3, \lambda_4) = \beta_2 \end{cases} \quad (4.17)$$

в межах $(-1/4, \infty)$ $(-1/4, \infty)$. Для розв'язання системи (4.17) необхідно скористатися чисельними методами. Зауважимо, що при пошуку розв'язку з використанням чисельних методів розв'язок істотно залежить від вибору початкової точки розв'язку. На основі знайдених λ_3, λ_4 значення параметрів λ_1, λ_2 визначаються в такий спосіб

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\sqrt{v_2 - v_1^2}}{\sigma}; \\
\lambda_1 &= m + \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_3 + 1} - \frac{1}{\lambda_4 + 1} \right).
\end{aligned}$$

Практичне використання універсальних одновимірних розподілів для визначення параметричної надійності

Отримаємо співвідношення для визначення параметричної надійності для однієї умови працездатності

$$P = \text{Вер}\{Z > 0\} = \int_0^{\infty} f(z) dz = \int_{\frac{m_Z}{\sigma_Z}}^{\infty} f(u) du, \quad (4.18)$$

де $f(u)$ – густина розподілу нормованої ВВ $U = \frac{Z - m_Z}{\sigma_Z}$ (для позначення

нормованої ВВ замість Z будемо використовувати U).

Для нормального розподілу ЗС утворюється відомий вираз

$$P_N = \Phi(\lambda), \quad (4.19)$$

де $\lambda = \frac{m_Z}{\sigma_Z}$.

У випадку використання в якості $f(u)$ розподілу Грам-Шарльє (4.12) для ІБР будемо мати

$$P_{HC} = \int_{\frac{m_Z}{\sigma_Z}}^{\infty} hc(u) du = HC(\infty) - HC(-\lambda) = 1 - HC(-\lambda).$$

Тепер, використовуючи вираз функції розподілу Грам-Шарльє (4.13), з урахуванням $\Phi(-\lambda) = 1 - \Phi(\lambda)$, $H_2(-t) = H_2(t)$ й $H_3(-t) = -H_3(t)$, остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} P_{HC} &= 1 - \left[\Phi(-\lambda) - \left(\frac{\beta_{1Z}}{3!} H_2(-\lambda) + \frac{\beta_{2Z}}{4!} H_3(-\lambda) \right) N(-\lambda) \right] = \\ &= \Phi(\lambda) + \left(\frac{\beta_{1Z}}{3!} H_2(\lambda) - \frac{\beta_{2Z}}{4!} H_3(\lambda) \right) N(\lambda). \end{aligned}$$

У випадку, якщо для опису ПС Z використовується узагальнений лямбда-розподіл (2.15), для визначення параметричної надійності необхідно розв'язати рівняння

$$\lambda_1 + \frac{(1-P)^{\lambda_3} - P^{\lambda_4}}{\lambda_2} = 0, \quad (4.20)$$

відносно P , яке безпосередньо витікає зі співвідношення (2.34) при $x = 0$. Рівняння (4.20) може бути розв'язане чисельними методами.

4.5.2 Багатомірні моделі

Побудова багатомірних моделей, передбачає побудову багатовимірних розподілів, наприклад, багатомірного розподілу $g^*(\bar{z})$ для визначення параметричної надійності. Побудова такого багатовимірною розподілу представляє досить складну задачу. Для її успішного розв'язання крім вивчення

імовірнісних властивостей окремих складових вектору ВВ потрібно проведення аналізу й опису стохастичних зв'язків між ними.

Клас багатомірних розподілів, вочевидь, є ще більшим у порівнянні з одномірним випадком. Аналіз відомих багатомірних розподілів показує, що не всі вони з однаковим успіхом можуть бути використані для розрахунків параметричної надійності. По-перше, більша частина багатомірних розподілів досить складні в обчислювальному плані. По-друге, багато розподілів не мають властивості загальності: одні не дозволяють урахувати асиметрію й ексцес маргінальних складових, інші – обмежені випадком лінійної кореляції між випадковими величинами (лінії регресії представляють прямі), треті – мають неприйнятні області варіювання складових багатомірного вектору.

Найпоширенішим у практичних завданнях і історично першим був багатовимірний нормальний розподіл, який для нормованих ВВ має вигляд

$$N(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{R}} e^{-\frac{1}{2}g(\bar{x})}, \quad (4.21)$$

де $g(\bar{x})$ – квадратична форма $g(\bar{x}) = \sum_i^n \sum_j^n \frac{R_{ij}}{R} x_i x_j = \sum_i^n \sum_j^n a_{ij} x_i x_j$; R – визначник матриці коефіцієнтів лінійної кореляції $\bar{\rho}^{(n)}$ розмірністю $n \cdot n$

$$\bar{\rho}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12}^{(11)} & \dots & \rho_{1n}^{(11)} \\ \rho_{21}^{(11)} & 1 & \dots & \rho_{2n}^{(11)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1}^{(11)} & \rho_{n2}^{(11)} & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

R_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента (i, j) кореляційної матриці $\bar{\rho}^{(n)}$; $a_{ij} = \frac{R_{ij}}{R}$ (перейти до загального випадку можна шляхом заміни змінних $y_i = m_i + \sigma_i x_i$ для $i = \overline{1, n}$).

Функція густини (4.21) має порівняно простий і добре вивчений вид, лінії регресії між будь-якими двома випадковими величинами – прямолінійні, а матриця коефіцієнтів кореляції у повній мірі характеризує стохастичний зв'язок між складовими (являється мірою кореляції). Зазначені обставини створили ситуацію винятковості нормального закону (про це вже неодноразово згадувалося вище). Можливо, певну складність представляє визначення функції нормального розподілу

$$\Phi(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{R}} \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n a_{ij} x_i x_j\right\} dx_1 \dots dx_n,$$

однак і це питання успішно вирішується.

У двовимірному випадку маємо

$$N(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right).$$

У той же час на практиці поширені випадки, коли маргінальні розподіли відмінні від нормального, а лінії регресії криволінійні. Це вимагає використання в розрахунках надійності розподілів, відмінних від нормального. Для практичного використання, як і в одномірному випадку, дослідникові бажано мати деякі універсальні форми розподілів, які дозволять вирішувати задачі в рамках однієї аналітичної форми. При цьому завдання ускладнюється тим фактом, що властивість універсальності повинна поширюватися як на маргінальні розподіли, так і на можливі форми ліній регресії.

За аналогією з одномірним випадком для багатомірних розподілів, універсальними можуть вважатися системи багатомірних розподілів Пірсона й Джонсона одномірні випадки, що узагальнюють відповідні. Тут ми зупинимось на випадку двох ВВ. Двовимірний розподіл системи Пірсона вводиться парою диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \ln f(x_1, x_2)}{\partial x_i} = \frac{L_i(x_1, x_2)}{Q_i(x_1, x_2)} \quad (i = 1, 2), \quad (4.22)$$

де $f(x_1, x_2)$ – спільна густина розподілу ВВ X_1, X_2 , L_i, Q_i – відповідно лінійна й квадратична функції аргументів x_1, x_2 . Зафіксувавши x_1 або x_2 , можна легко переконатися, що умовний розподіл задовольняє диференційному рівнянню, яке визначає розподіл одномірної системи Пірсона (4.6).

Тим не менш, можна указати ряд недоліків двомірної (а в загальному випадку й багатомірної) системи Пірсона. Виявляється, що функції L_i, Q_i ($i = 1, 2$) не можуть бути обрані довільно. До другого недоліку системи Пірсона можна віднести те, що лінії регресії є прямими, і це звужує можливості апроксимації розподілами (4.22) реальних двовимірних сукупностей. Проте, розподіли системи Пірсона з успіхом використовуються на практиці у випадках близької до лінійної регресії й нижче. В табл. 3.1 наведені деякі представники (4.22), для яких маргінальні розподіли збігаються

Таблиця 4.4

Двовірні розподіли системи Пірсона

Густина розподілу	Умови	Типи одномірних	
		I (II)	I (II)
$\frac{\Gamma(m_1 + m_2 + m_3)}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\Gamma(m_3)} x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} (1 - x_1 - x_2)^{m_3-1}$	$m_1, m_2, m_3 > 0;$ $x_1, x_2 > 0;$ $x_1 + x_2 \leq 1$	I (II)	I (II)
$\frac{x_1^{m_1-1} (x_2 - x_1)^{m_2-1} e^{-x_2}}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}$	$m_1, m_2 > 0;$ $0 < x_1 < x_2$	III	III
$\frac{\Gamma(-m_3 + 1) x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} (1 + x_1 + x_2)^{m_3-1}}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\Gamma(-m_1 - m_2 - m_3 + 1)}$	$m_1, m_2 > 0;$ $m_1 + m_2 + m_3 < 0;$ $x_1, x_2 > 0$	VI	VI

$\frac{-m\sqrt{1-\rho^2}}{\pi k^m} (k + x_1^2 + 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)^{m-1}$	$m < 0;$ $ \rho < 1;$ $k > 0$	VII	VII
---	--------------------------------------	-----	-----

Наведені в таблиці 4.4 форми не є єдиними. Відзначимо, також, що двовимірний нормальний розподіл є окремим випадком (4.22).

Система Джонсона для двовимірного випадку будується з використанням наступних функціональних перетворень

$$\begin{aligned} \frac{Y_1 - \gamma_1}{\delta_1} &= g_1\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\lambda_1}\right); \\ \frac{Y_2 - \gamma_2}{\delta_2} &= g_2\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\lambda_2}\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

де Y_1, Y_2 – випадкові величини, які мають спільний двовимірний стандартний нормальний розподіл; γ_i, μ_i ($i = 1, 2$) – параметри зсуву; δ_i, λ_i ($i = 1, 2$) – параметри масштабу; $g_i(\bullet)$ – деякі монотонні функції, які можуть бути обрані аналогічно одномірному випадку. Використовуючи в (4.23) різні функції $g_i(\bullet)$, можна отримати різні види двовимірних розподілів. Нижче наведено вирази для густини розподілів, для яких функції $g_i(\bullet)$ ($i=1, 2$) збігаються:

– двовірне логнормальний розподіл

$$\begin{aligned} f_{LL}(x_1, x_2) &= \frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi \lambda_1 \lambda_2 z_1 z_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[(\gamma_1 + \eta_1 \ln(z_1))^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho(\gamma_1 + \eta_1 \ln(z_1))(\gamma_2 + \eta_2 \ln(z_2)) + (\gamma_2 + \eta_2 \ln(z_2))^2 \right] \right\}; \end{aligned}$$

– двовірний S_U розподіл

$$\begin{aligned} f_{UU}(x_1, x_2) &= \frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{(1+z_1^2)(1+z_2^2)(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[(\gamma_1 + \eta_1 \operatorname{arcsch}(z_1))^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho(\gamma_1 + \eta_1 \operatorname{arcsch}(z_1))(\gamma_2 + \eta_2 \operatorname{arcsch}(z_2)) + (\gamma_2 + \eta_2 \operatorname{arcsch}(z_2))^2 \right] \right\}; \end{aligned}$$

– двовірний S_B розподіл

$$\begin{aligned} f_{BB}(x_1, x_2) &= \frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi \lambda_1 \lambda_2 (1 - (2z_1 - 1)^2) (1 - (2z_2 - 1)^2) (1 + z_2^2) \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[(\gamma_1 + \eta_1 \operatorname{arth}(z_1))^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho(\gamma_1 + \eta_1 \operatorname{arth}(z_1))(\gamma_2 + \eta_2 \operatorname{arth}(z_2)) + (\gamma_2 + \eta_2 \operatorname{arth}(z_2))^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Лінії регресії системи розподілів Джонсона відмінні від прямих і можуть приймати різні форми. Проте слід особливо підкреслити, що вибір необхідної форми для опису ВВ за наявним даними, а також питання підгонки багатомірних розподілів Джонсона набагато складніше в порівнянні з одномірним випадком.

У якості універсальної моделі може використовуватися багатомірний розподіл Грам-Шарльє, який в n -мірному випадку є досить складним. Його побудовано на основі багатомірних ортогональних поліномів Чебишева-Ерміта. Найбільше практичне застосування може мати двовимірний варіант розподілу Грам-Шарльє, який має більш простий вигляд

$$\begin{aligned}
 hc(x_1, x_2) = N(x_1, x_2) & \left\{ 1 + \frac{\beta_{11}}{3!} (\xi_1^3 - 3a_{11}\xi_1) + \frac{\beta_{12}}{3!} (\xi_2^3 - 3a_{22}\xi_2) + \right. \\
 & + \frac{\rho_{21}}{2} (\xi_1^2 \xi_2 - 2a_{12}\xi_1 - a_{11}\xi_2) + \frac{\rho_{12}}{2} (\xi_1 \xi_2^2 - 2a_{21}\xi_2 - a_{22}\xi_1) + \\
 & + \frac{\beta_{21}}{4!} (\xi_1^4 - 6a_{11}\xi_1^2 + 3a_{11}^2) + \frac{\beta_{22}}{4!} (\xi_2^4 - 6a_{22}\xi_2^2 + 3a_{22}^2) + \\
 & + \frac{(\rho_{31} - 3\rho_{11})}{3!} (\xi_1^3 \xi_2 - 3a_{12}\xi_1^2 - 3a_{11}\xi_1 \xi_2 + 3a_{11}a_{12}) + \\
 & + \frac{(\rho_{13} - 3\rho_{11})}{3!} (\xi_1 \xi_2^3 - 3a_{21}\xi_2^2 - 3a_{22}\xi_1 \xi_2 + 3a_{12}a_{22}) + \\
 & \left. + \frac{(\rho_{22} - 2\rho_{11}^2 - 1)}{4} (\xi_1^2 \xi_2^2 - a_{11}\xi_2^2 - a_{22}\xi_1^2 - 4a_{12}\xi_1 \xi_2 + a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2) \right\}, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

де $\xi_1 = \frac{x_1 - \rho_{11}x_2}{1 - \rho_{11}^2}$; $\xi_2 = \frac{x_2 - \rho_{11}x_1}{1 - \rho_{11}^2}$; $a_{11} = a_{22} = \frac{1}{1 - \rho_{11}^2}$; $a_{12} = a_{21} = -\frac{\rho_{11}}{1 - \rho_{11}^2}$;
 $\rho_{ij} = \rho_{12}^{(ij)}$.

Для його побудови необхідні маргінальні й приведені числові характеристики до 4-го порядку включно

$$\rho_{ks} = \frac{1}{\sigma_X^k \sigma_Y^s} \iint_{\Omega} (x - m_X)^k (y - m_Y)^s f(x, y) dx dy \quad (2 \leq k+s \leq 4)$$

Як і в одновимірному випадку розподіл Грама-Шарльє схильний до виходу в негативну область. Для двовимірного аналога $hc(x_1, x_2)$ області, яку визначено інтервалами зміни кожної зі змінних $[-4, 4]$, оцінювалися виходи поверхні розподілу в негативні області й наявність декількох екстремумів (максимумів і мінімумів). Виходячи із практичних міркувань, не враховувалися виходи поверхні розподілу в негативні області, які по абсолютній величині не перевищували 10^{-4} . Насамперед, нас цікавили області значень наведених змішаних моментів, що забезпечують необхідні властивості розподілу Грам-Шарльє. Розглядаючи випадок незначних по величині коефіцієнтів скосу й ексцесу $\beta_{11} = \beta_{12} = 0,1$; $\beta_{21} = \beta_{22} = 0,2$, а також малої лінійної кореляції $\rho_{11} = 0,2$, можна, наприклад, одержати наступні результати. Для значень наведених змішаних моментів 4-го порядку $\rho_{31} = \rho_{13} = 0,6$ і $\rho_{22} = 1,08$, відповідних до нормального випадку, виявилось, що область використання розподілу Грам-Шарльє по ρ_{21} , ρ_{12} охоплює значення в інтервалі від 0 до

$|0,15|$ (для комбінації значень ρ_{21}, ρ_{12} різного знаку ці інтервали вже є). Для значень наведених змішаних моментів 3-го порядку $\rho_{21} = \rho_{12} = 0$ область використання розподілу Грам-Шарльє по ρ_{31}, ρ_{13} охоплює інтервал $[0,4; 0,7]$, а по $\rho_{22} - [1,05; 1,3]$. Якщо відмінними від нормального випадку одночасно були значення

наведених змішаних моментів 3-го й 4-го порядків, тоді можливості використання розподілу Грам-Шарльє уклалися в межах отриманих для $\rho_{21}, \rho_{12}, \rho_{31}, \rho_{13}, \rho_{22}$ інтервалів.

Збільшення лінійної кореляції не приводить до кардинальної зміни можливостей використання розподілу Грам-Шарльє. В якості прикладу на рис. 4.9 показана поверхня двомірного розподілу Грам-Шарльє для значень параметрів

$$\beta_{1_1} = 0,1; \quad \beta_{1_2} = 0,1; \quad \beta_{2_1} = 0,2; \quad \beta_{2_2} = 0,2; \quad \rho_{11} = 0,2;$$

$$\rho_{21} = 0,15; \quad \rho_{12} = 0,15; \quad \rho_{31} = 0,7; \quad \rho_{22} = 1,1; \quad \rho_{13} = 0,7.$$

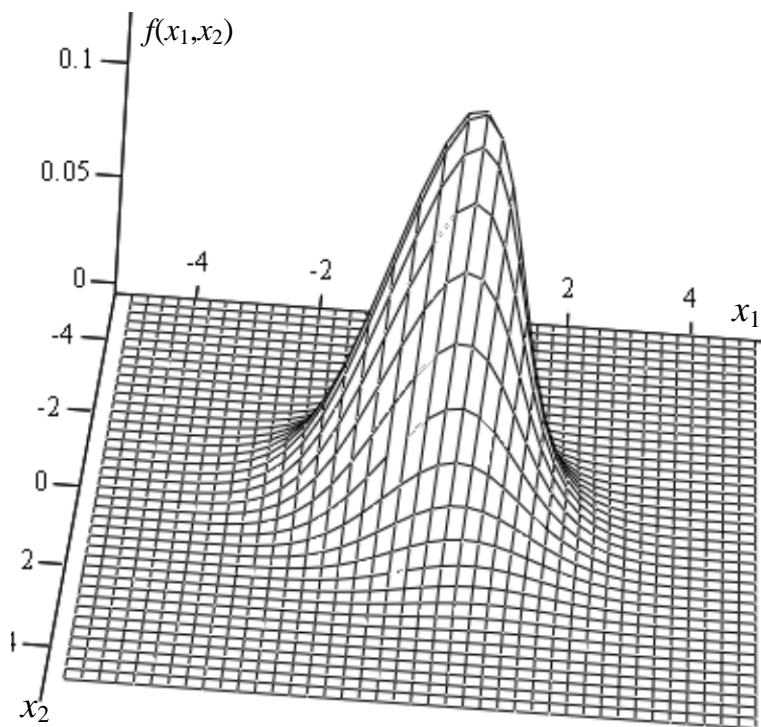


Рис. 4.9. Поверхня розподілу Грам-Шарльє

Зв'язки

Для побудови двовимірних і багатомірних розподілів широке поширення знайшли так звані зв'язки. Вони дозволяють будувати багатомірний розподіл виходячи з маргінальних складових. Роботи зі створення й дослідженню зв'язок були ініційовані, доведеної теоремою, згідно з якою, якщо $F_1(x)$ і $F_2(y)$ безперервні функції розподілів ВВ X і Y відповідно, а $F_{1,2}(x,y)$ спільна функція розподілу цих ВВ, тоді є єдине подання спільної функції розподілу виду

$$F_{1,2}(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)). \quad (4.25)$$

де функція $C(u, v)$ ($0 \leq u, v \leq 1$) в (4.25) носить назву зв'язки. Зворотно, якщо відомі маргінальні функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$, а $C(\bullet, \bullet)$ становить зв'язку, тоді функція, яка визначається згідно (4.25), є спільною функцією розподілу X й Y .

Зв'язка Фарльє-Гумбеля-Моргенштерна

Найпростішою з відомих є зв'язка Фарльє-Гумбеля-Моргенштерна, спільний розподіл для якої має вигляд

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)[1 + \alpha(1 - F_1(x))(1 - F_2(y))], \quad (4.26)$$

де α - параметр кореляції.

Густина розподілу, відповідного до (4.26), утворюється шляхом диференціювання

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f_1(x) f_2(y) [1 + \alpha(2F_1(x) - 1)(2F_2(y) - 1)]. \quad (4.27)$$

Для параметра кореляції необхідно виконання наступної умови

$$|\alpha| \leq 1,$$

яка забезпечує додатні значення функції густини розподілу (4.27).

Принципові труднощі при побудові розподілу Гумбеля-Моргенштерна представляє визначення параметра α . Його значення може бути отримане по методу моментів виходячи з коваріаційного моменту. У загальному випадку для змішаного центрального моменту порядку $m + n$ можна одержати наступний вираз

$$\begin{aligned} \mu_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^m (y - m_Y)^n f(x, y) dx dy = \\ &= \mu_{m0} \mu_{0n} + \alpha \left(4L_X^{(m)} L_Y^{(n)} - 2\mu_{0n} L_X^{(m)} - 2\mu_{m0} L_Y^{(n)} + \mu_{m0} \mu_{0n} \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

де позначене $L_Z^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} (z - m_Z)^n F(z) dF(Z)$.

Зі співвідношення (4.28) зокрема виходить

$$\mu_{11} = 4\alpha L_X^{(1)} L_Y^{(1)},$$

звідки безпосередньо випливає

$$\alpha = \frac{\mu_{11}}{4L_X^{(1)} L_Y^{(1)}}.$$

Інтеграл $L_Z^{(n)}$ з використанням бінома Ньютона може бути виражений через більш прості інтеграли виду $K_Z^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} z^n F(z) dF(Z)$.

Розглянемо докладніше інтеграл $L_Z^{(1)}$, оскільки його значення визначає область можливих значень для коефіцієнта лінійної кореляції ρ_{11} спільного розподілу. Для $\beta_1 = 0$ і $\beta_2 = 0$ (відповідає нормальному розподілу) виходить значення $L_Z^{(1)} = 0,282$. При додатних значеннях β_2 , що виходять значення $L_Z^{(1)}$ менше 0,282, однак, вони не нижче 0,26. При від'ємних значеннях β_2 значення $L_Z^{(1)}$ перевищують 0,282 (при цьому вони не більші 0,29). Наприклад, для $\beta_1 = 0$ і $\beta_2 = -1,2$, що відповідає рівномірному розподілу $L_Z^{(1)} = 0,288675$.

Враховуючи область можливих значень $L_Z^{(1)}$, а також умову $|\alpha| \leq 1$, виходить, що інтервал можливих значень коефіцієнта лінійної кореляції становить $|\rho_{11}| \leq 0,33$, а для розподілів з додатним ексцесом $|\rho_{11}| \leq 0,3$. Якщо маргінальні розподіли є рівномірними, максимальний коефіцієнт кореляції

рівний $\rho_{\max} = \frac{1}{3}$; для нормальних маргінальних $\rho_{\max} = \frac{1}{\pi}$; для експонентних маргінальних $\rho_{\max} = \frac{1}{4}$; для логістичних маргінальних $\rho_{\max} = \frac{3}{\pi^2}$.

Нормальна зв'язка

Більш цікавою з погляду практичного використання є нормальна зв'язка, яку можна використати для коефіцієнтів лінійної кореляції в інтервалі $[-1; 1]$. Нормальна зв'язка вводиться в такий спосіб

$$C_N(u_1, u_2; \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{(-)}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{(-)}(u_2)} \exp\left\{-\frac{y_1^2 - 2\theta y_1 y_2 + y_2^2}{2(1-\theta^2)}\right\} dy_1 dy_2$$

і відповідно функція розподілу для неї має вигляд

$$F_{1,2}(x_1, x_2) = \Phi\left(\Phi^{(-)}(F_1(x_1)), \Phi^{(-)}(F_2(x_2)); \theta\right), \quad (4.29)$$

де $F_i(x_i) = u_i$ – маргінальна функція розподілу ВВ X_i ; $\Phi^{(-)}(\bullet)$ – функція зворотна функції Лапласа; $\Phi(\bullet, \bullet; \theta)$ – функція двомірного нормального розподілу; θ – параметр, який характеризує лінійний зв'язок між випадковими величинами Y_i , які відповідають спільному нормальному закону.

Покажемо, яким способом отримати вираз для функції густини нормальної зв'язки. Використовуючи перетворення

$$\Phi(y_i) = F_i(x_i), \quad (4.30)$$

й наступне з нього співвідношення

$$y_i = \Phi^{(-)}[F_i(x_i)], \quad (4.31)$$

а також враховуючи, що ВВ Y_i мають нормальний розподіл, вираз для спільної функції густини розподілу можна записати наступним образом

$$\begin{aligned} f_{1,2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial F_{1,2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial F_{1,2}}{\partial y_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \\ &= N\left(\Phi^{(-)}(F_1(x_1)), \Phi^{(-)}(F_2(x_2)); \theta\right) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

де $N(\bullet, \bullet; \theta)$ – функція густини двомірного стандартного нормального розподілу.

Проводячи диференціювання виразу (4.30) як неявної функції, отримуємо

$$N(y_i) \frac{dy_i}{dx_i} = f_i(x_i),$$

($N(\bullet)$ – функція густини стандартного нормального розподілу), звідки

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{f_i(x_i)}{N(y_i)}$$

або з урахуванням (4.31)

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{f_i(x_i)}{N(\Phi^{(-)}(F_i(x_i)))}.$$

У підсумку вираз для функції густини набуває вид

$$f_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{N(\Phi^{(-)}(F_1(x_1)), \Phi^{(-)}(F_2(x_2)); \theta)}{N(\Phi^{(-)}(F_1(x_1))) \cdot N(\Phi^{(-)}(F_2(x_2)))} f_1(x_1) f_2(x_2). \quad (4.32)$$

Останній вираз також може бути записаний у вигляді

$$f_{1,2}(x_1, x_2) = k(x_1, x_2) f_1(x_1) f_2(x_2),$$

де $k(x_1, x_2)$ – функція, що описує кореляційну залежність між ВВ.

Для практичної побудови зв'язок (4.27), (4.32) необхідно вибрати маргінальні складові $F_1(x)$, $F_2(y)$.

Опис кореляційних зв'язків між випадковими величинами

Найпоширенішими в прикладному статистичному аналізі є лінії регресії, які є найбільш наочними. За їхньою кривизною та розташуванням робляться відповідні висновки про характер кореляції між ВВ. Якщо умовне математичне сподівання $m_{Y/x}$ суть лінійна функція, то говорять, що регресія Y по X прямолінійна. Якщо обидві регресії прямолінійні, то кореляція між X і Y називається лінійною. А якщо ні, то кореляція називається криволінійною.

У прикладних задачах для опису стохастичної залежності найбільше поширення має коефіцієнт лінійної кореляції

$$\rho_{11} = \frac{M(XY)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Він входить до функції густини двовимірного нормального розподілу.

За його абсолютною величиною оцінюють ступінь кореляції, а за знаком – напрямком. При цьому кореляція між випадковими величинами свідомо ототожнюється з лінійною. Найчастіше дослідники навіть не цікавляться видом ліній регресії (тобто їхньою кривизною), і про ступінь кореляції судять по величині коефіцієнта лінійної кореляції ρ_{11} .

Проте можна вказати низку прикладів, які показують неспроможність коефіцієнта лінійної кореляції ρ_{11} як міри кореляції. Розглянемо наступну статистичну сукупність (рис. 4.10). Чисельний аналіз для неї дає оцінку коефіцієнта кореляції ρ_{11} близьку до 0. У відповідності із цим лінія регресії представляє пряму паралельну осі X . Проте, як видно з рисунка, кореляція між ВВ X та Y є суттєво нелінійною.

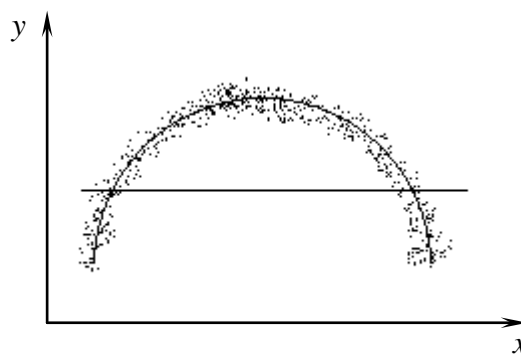


Рис. 4.10. Статистична сукупність з істотно нелінійною стохастичною залежністю

Цікавим є підхід описувати кореляційні зв'язки між ВВ з позицій обґрунтованої міри, яка дорівнює нулю для незалежних ВВ. Більшість таких мір є дуже складними і малоприматними для практичних задач. До найбільш відомих обґрунтованих мір кореляції, наприклад, належать кореляційні відношення Пірсона

$$\eta_{Y/x}^2 = \frac{1}{\sigma_Y^2} \int_{-\infty}^{\infty} (m_2(x) - m_Y)^2 f_1(x) dx;$$

$$\eta_{X/y}^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} \int_{-\infty}^{\infty} (m_1(y) - m_X)^2 f_2(y) dy,$$

де $f_i(\bullet)$ – частинні розподіли; $m_1(y)$, $m_2(x)$ – відповідні лінії регресії.

Проте досліднику було б цікаво мати таку міру, що використовує приведені числові характеристики, які необхідні для побудови багатовимірного розподілу (дивись розділ 2 та вираз двовимірного розподілу Грама-Шарльє). Парні приведені числові характеристики між ВВ

$$\rho_{ks} = \frac{1}{\sigma_X^k \sigma_Y^s} \iint_{\Omega} (x - m_X)^k (y - m_Y)^s f(x, y) dx dy \quad (2 \leq k+s \leq 4)$$

дозволяють певним образом описати стохастичну залежність. При цьому ρ_{12} , ρ_{21} , ρ_{13} , ρ_{31} ототожнюються з нелінійною кореляцією, хоча вони лише характеризують її, не являючись при цьому повноцінною мірою.

В якості міри, яка є зручною на практиці, можна рекомендувати наступну міру кореляції

$$\Lambda_3 = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \rho_{11} \\ \lambda_{2_X} = \rho_{21} - \rho_{3_X} \rho_{11}, \lambda_{2_Y} = \rho_{12} - \rho_{3_Y} \rho_{11} \\ \lambda_{3_X} = \rho_{31} - \rho_{4_X} \rho_{11}, \lambda_{3_Y} = \rho_{13} - \rho_{4_Y} \rho_{11} \end{array} \right\}. \quad (4.33)$$

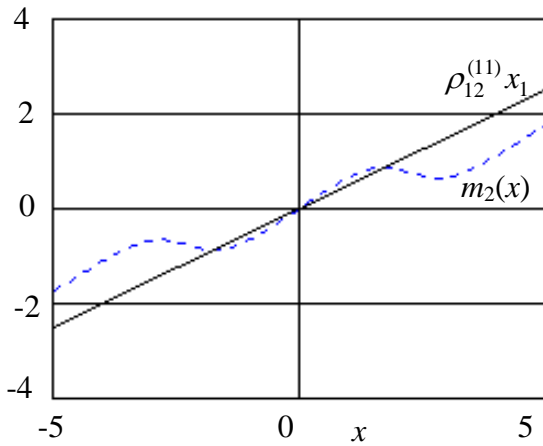
Тут параметр λ_1 характеризує лінійну, а параметри λ_{2_X} , λ_{2_Y} , λ_{3_X} , λ_{3_Y} – нелінійну частину стохастичної залежності.

Вона виходить із виразів для ліній регресії двовимірного розподілу Грама-Шарльє.

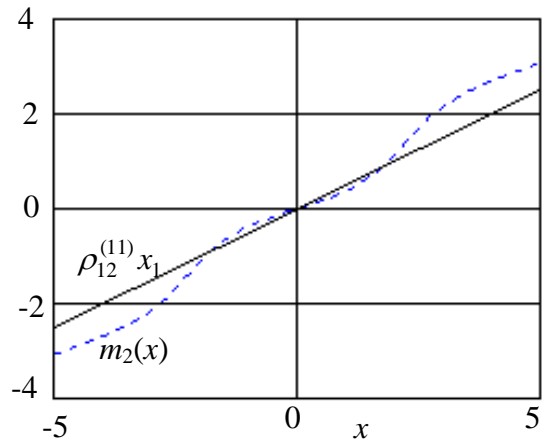
У випадку, якщо ВВ незалежні, усі коефіцієнти λ_1 , λ_{2_X} , λ_{2_Y} , λ_{3_X} , λ_{3_Y} повинні дорівнювати 0. Якщо кореляція між X й Y лінійна, тоді $\lambda_1 \neq 0$, а $\lambda_{2_X} = \lambda_{2_Y} = \lambda_{3_X} = \lambda_{3_Y} = 0$. Якщо хоча б один з коефіцієнтів λ_{2_X} , λ_{3_X} (λ_{2_Y} , λ_{3_Y}) відмінний від 0, X й Y поєднані криволінійною стохастичною залежністю.

Покажемо, як елементи системи (4.33) характеризують викривлення лінії регресії $m_2(x)$ стандартного двовимірного розподілу Грама-Шарльє (рис. 4.11). На рис. 4.11 а), б) повна симетрія ліній регресії щодо точки математичного сподівання, відмінні від нормальних значень коефіцієнти β_{2_X} , ρ_{31} її не порушують. У цьому випадку скривлення лінії регресії $m_2(x)$ характеризує параметр $\lambda_{3_X} \neq 0$; при цьому $\lambda_{2_X} = 0$. Зазначені рисунки наочно демонструють, як положення лінії регресії впливає на знак λ_{3_X} . Симетрія лінії регресії $m_2(x)$ відносно точки математичного сподівання порушується, якщо $\beta_{1_X} \neq 0$ або (і) $\rho_{21} \neq 0$ (див. рис. 4.11 в), г), д)). На рис. 4.11 в), г) показано різний характер несиметричного скривлення лінії регресії, обумовлений відмінним від 0 наведеним змішаним моментом ρ_{21} . Параметр λ_{2_X} для цих двох випадків має різний знак, а кореляційне відношення при цьому ухвалює те

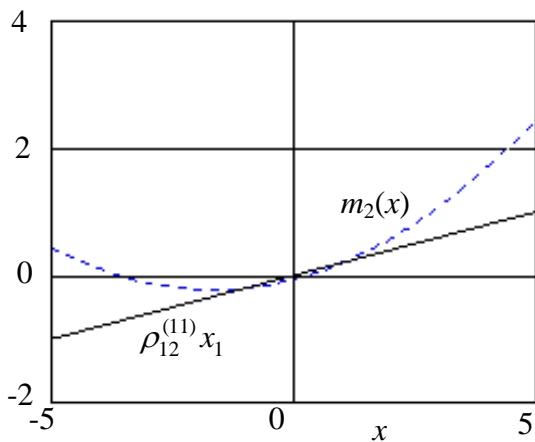
саме значення $\eta_{Y/x}^2=0,43$, не відзначаючи принципової відмінності характеру



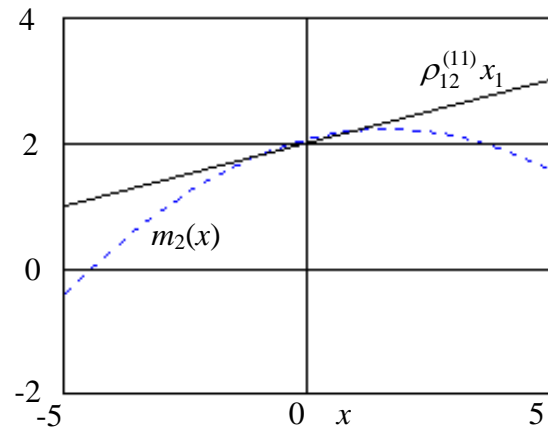
а).



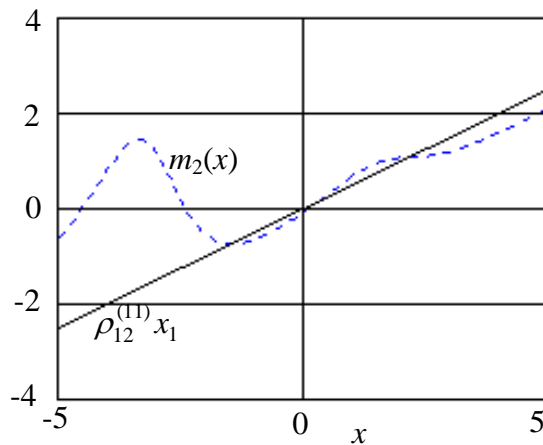
б).



в).



г).



д).

скривлення лінії регресії.

Рисунок 4.11 - Лінії регресії $m_2(x)$ двовимірного розподілу Грама-Шарльє:

- а) $\beta_{1_x} = 0, \beta_{2_x} = 0,5, \rho_{11} = 0,5, \rho_{21} = 0, \rho_{31} = 1,3, \lambda_{2_x} = 0, \lambda_{3_x} = -0,45$;
- б) $\beta_{1_x} = 0, \beta_{2_x} = 0,5, \rho_{11} = 0,5, \rho_{21} = 0, \rho_{31} = 2,1, \lambda_{2_x} = 0, \lambda_{3_x} = 0,35$;
- в) $\beta_{1_x} = 0, \beta_{2_x} = 0, \rho_{11} = 0,5, \rho_{21} = 0,3, \rho_{31} = 1,5, \lambda_{2_x} = 0,3, \lambda_{3_x} = 0$;
- г) $\beta_{1_x} = 0, \beta_{2_x} = 0, \rho_{11} = 0,5, \rho_{21} = -0,3, \rho_{31} = 1,5, \lambda_{2_x} = -0,3, \lambda_{3_x} = 0$;
- д) $\beta_{1_x} = 0,3, \beta_{2_x} = 0,5, \rho_{11} = 0,5, \rho_{21} = 0,3, \rho_{31} = 1,3, \lambda_{2_x} = 0,15, \lambda_{3_x} = -0,45$.

У підсумку треба зробити кілька зауважень щодо впливу наведених маргінальних і змішаних моментів на скривлення ліній регресії:

- відмінні від 0 наведені числові характеристики $\beta_{1x}, \beta_{1y}, \rho_{21}, \rho_{12}$ викривляють лінії регресії, роблячи їх несиметричними щодо математичного сподівання. Лінія регресії може залишатися несиметричною щодо математичного сподівання навіть при $\rho_{21} = \rho_{12} = 0$ (скривлення викликають коефіцієнти відмінні від 0 β_{1x}, β_{1y})
- відмінні від нормальних значень $\beta_{2x}, \beta_{2y}, \rho_{31}, \rho_{13}$ сприяють скривленню ліній регресії, які при цьому залишаються симетричними відносно точки математичного сподівання;
- лінії регресії можуть залишатися прямими навіть у випадку відмінності від нормальних значень наведених числових характеристик $\rho_{21}, \rho_{12}, \rho_{31}, \rho_{13}$, але при цьому повинне виконуватися $\lambda_{2x} = \lambda_{3x} = 0$ або $\lambda_{2y} = \lambda_{3y} = 0$.

Дослідження стохастичної залежності в багатомірних сукупностях параметрів ракетної техніки

Комплексний статистичний аналіз стохастичних залежностей між характеристиками систем РКТ проводився з використанням міри кореляційної залежності $\bar{\Lambda}$ на базі Λ_3 у комбінації з кореляційними відношеннями. Усі досліджувані багатомірні статистичні сукупності розбивалися на пари двомірних сукупностей і досліджувалися кореляційні властивості для кожної з пар. Результати обробки багатомірних статистичних вибірок і аналізу кореляційних зв'язків наведено в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6

Результати статистичного дослідження багатомірних сукупностей параметрів РКТ

№ вибірки	Число двомірних вибірок	Загальна доля залежних пар, %	Доля пар з нелінійною кореляцією, %	Доля пар з нелінійною та слабонелінійною кореляцією, %
1	66	35/32	30/28	55/51
2	21	38/41	25/24	25/26
3	91	11/10	25/29	76/85
4	78	13/15	70/78	81/90
5	66	22/19	54/50	62/61
6	78	62/65	50/55	63/68
7	45	33/30	14/13	20/21
8	28	12/15	0/2	0/3
9	28	25/29	14/10	29/26
10	120	48/51	19/19	35/38
11	21	34/30	10/18	20/31

12	36	20/24	0/3	19/16
13	36	22/28	11/17	19/25
14	36	22/21	25/23	50/51
15	15	17/15	40/36	60/55
16	36	14/29	20/19	40/43
17	28	22/22	72/68	72/69
18	21	14/16	34/39	34/40
19	28	32/28	39/40	91/92
20	66	17/16	28/26	28/27
21	45	42/38	40/46	53/56
22	41	36/41	16/18	33/36

У комірках, що містять по два значення (наприклад, 19/25), перше значення отримане з використанням Λ_3 , друге - з використанням критеріїв, заснованих на кореляційних відношеннях.

Проведений аналіз дозволив зробити деякі узагальнюючі висновки. Дані таблиці показують, що розглянуті багатомірні сукупності містять залежні параметри (частка двовимірних сукупностей, у яких виявлені стохастичні зв'язки, у середньому становлять 25 – 30%). Переважна більшість сукупностей (більш 90 %) мають у своєму складі двомірні сукупності з нелінійної й слабонелінійною кореляцією. Частка двомірних сукупностей з нелінійною кореляцією в середньому становить ~30 %, хоча є незначний відсоток багатомірних сукупностей (до 15 %), у яких ця величина досягає 70 %. Таким чином, необхідна альтернатива багатомірним нормальним моделям.

Тема 5

ВПЛИВ ВИКОРИСТОВУВАНИХ У ПРОЦЕСІ ПРОЕКТУВАННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ БЕЗПЕКИ НА НАДІЙНІСТЬ СИСТЕМ РКТ

5.1 Методи урахування погрешностей моделей працездатності на етапі проектування

В процесі проектування систем ракетно-космічної техніки й, зокрема МС, використовуються два основні підходи: детерміністичний і імовірнісний. В основі обох цих підходів застосування моделей працездатності, які представляють системи функціональних нерівностей, наприклад, у вигляді моделі «навантаження- несучої здатності» (дивися (2.13))

$$Z_j = R_j(\bar{X}) - S_j(\bar{Y}) \geq 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (5.1)$$

де Z_j – змінна стану; \bar{X}, \bar{Y} – вхідні параметри, які визначають навантаження S , діюче на МС, та її несучу здатність R ; m - кількість умов працездатності.

На підставі системи (5.1) визначаються основні конструктивні параметри МС і оцінюється її потенційна несуча здатність. Зауважимо, що модель не ототожнюється виключно з міцністю, вона використовується і в інших технічних задачах (для опису процесів іншої фізичної природи).

На ранніх етапах створення ракетної техніки переважав детерміністичний підхід, який широко використовується і в теперішній час, наприклад, у розрахунках на міцність. Згідно цього підходу умови працездатності (5.1) у детерміністичній формі безпосередньо використовують для вибору конструктивних параметрів МС. Усі параметри в (5.1) розглядаються як граничні значення, що йдуть у запас несучої здатності, відповідно до їхніх допусків (областей зміни). Потенційну несучу здатність спроектованої конструкції оцінюють за коефіцієнтами запасу (відносна форма запису умов працездатності (5.1))

$$\eta = \frac{R'}{S}, \quad (5.2)$$

де R' – розрахункове (отримане) значення несучої здатності, S – діюче навантаження. Коефіцієнти запасу повинні бути більше за одиницю, що свідчить про достатню міцність конструкції, що проектується.

Такий спосіб оцінки міцності знайшов широке застосування насамперед тому, що коефіцієнт запасу має простий у визначенні й безрозмірний вигляд. Останнє призводить до незалежності η від конструктивних особливостей, видів навантаження й форм руйнування елементів.

Усі неточності, пов'язані з погрешністю моделей (5.1) і вихідних даних, у детерміністичному проектуванні прийнято враховувати за допомогою певних коефіцієнтів, мета яких завищити експлуатаційне навантаження або занижити несучу здатність. Природно, що такі коефіцієнти було представлено у формі коефіцієнта запасу (5.2).

У будівельній механіці умову неруйнування з урахуванням нормативного коефіцієнта прийнято записувати у вигляді [1]

$$S_H \leq \frac{R_H}{k}, \quad (5.3)$$

де S_H – розрахункове (нормативне) навантаження, R_H – розрахункова (нормативна) несуча спроможність (значення навантажень й несучої спроможності входять в умову (5.3) як деякі цілком визначені детерміновані величини), k – нормативний коефіцієнт запасу міцності.

Зв'язок коефіцієнта запасу міцності та його нормативного аналога настільки тісний, що різні аспекти дослідження коефіцієнта запасу знайшли своє відображення у відповідних нормативних коефіцієнтах. Так з'явилась ідея розділити нормативний коефіцієнт запасу на окремі компоненти, кожному з яких відповідає певний логічний сенс, пов'язаний з мінливістю тих або інших факторів. Наприклад нормативний коефіцієнт зводиться до виду

$$k = k_1 k_2 k_3 \dots k_n, \quad (5.4)$$

де k_1 – коефіцієнт перевантаження, що враховує мінливість навантаження; k_2 – коефіцієнт, що враховує відмінність характеристик реальної конструкції від розрахункової схеми; k_3 – коефіцієнт однорідності, що враховує мінливість міцності матеріалу і так далі. Проте, подібний підхід наражається на певні труднощі, пов'язані з тим, що призначити кожен складову нормативного коефіцієнта в (5.4) незалежно від інших неможливо, через їхній взаємозв'язок.

В авіації й ракетній техніці прийнято розглядати іншу форму умови працездатності в детерміністичній постановці. Прийнято вважати, що міцність буде забезпечено, якщо літальний апарат або його елемент витримає навантаження, збільшені в f раз ($f > 1$) по відношенню нормальних експлуатаційних. Експлуатаційне навантаження, помножене на коефіцієнт безпеки, носить назву розрахункового навантаження

$$T^P = fT^E \quad (5.5)$$

(у детерміністичному підході T^E максимальне значення діючого навантаження).

За своєю природою обидва способи підвищення потенційної несучої здатності за рахунок компенсації різного роду похибок у вигляді деяких коефіцієнтів, які вводять в умови працездатності і тим самим збільшують діюче навантаження або зменшують міцність, аналогічні.

В цілому, отримана в рамках детерміністичного підходу інформація для нормативних коефіцієнтів k або f , дає можливість на стадії проектування врахувати вплив різних факторів на міцність проекрованої конструкції.

Застосування імовірнісних методів в процесі проектування дозволило врахувати випадковий характер різноманітних факторів міцності МС і діючих навантажень та перейти від оцінки коефіцієнтів запасу до оцінок ІБР – імовірності виконання умов (5.1). Треба відзначити, що елементи імовірнісного підходу почали використовуватися ще в процесі детерміністичного проектування. Експлуатаційні (нормативні) значення навантаження (дивись (5.4)) й міцності у розрахунках хоча й вважались не випадковими, проте стосовно реальних величин представлялися такими, що враховують їх випадковий характер: середні, найбільш імовірні значення, або середні в групі найбільших (найменших) значень. Так, наприклад, під експлуатаційним

розумілося навантаження (рис. 5.1), ймовірність перевищення якого відповідало деякій малій величині γ (наприклад 0,05, 0,01).

Врахування імовірнісного характеру параметрів, що описують стан МС, дозволив відмовитися від необхідності враховувати їхній випадковий розкид. Проте математичні моделі, що описують працездатність МС (5.1), навіть в імовірнісній постановці, як і раніше, містять погрішність, бо є лише певною формалізацією фізичного процесу, що тією чи іншою мірою наближаються до реальності. Слід також урахувати невизначеності, пов'язані з одержанням статистичної інформації по вхідним параметрам \bar{X}, \bar{Y} :

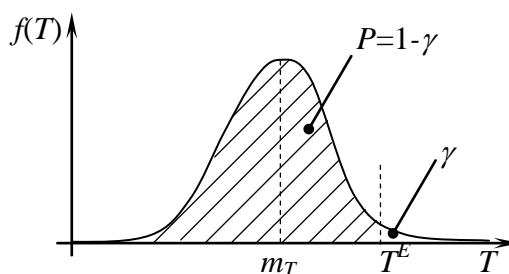


Рисунок 5.1 – Визначення експлуатаційного навантаження

- обмежений об'єм вибірок та пов'язані з цим похибки вибору виду апроксимуючої функції густини;
- помилки при випробуваннях і вимірюваннях.

При переході на імовірнісну основу, моделі визначення ІБР продовжували будувати на основі коефіцієнтів запасу (5.2), які почали вважати випадковими величинами. Проте в імовірнісному проектуванні безрозмірність умов працездатності вже не має вирішального значення, бо ІБР за своєю природою є безрозмірною величиною. Відповідно до цього стало можливо використовувати кілька моделей, що враховують наявні погрішності. В основному вони обмежуються двома схемами урахування погрішностей у вигляді адитивної і мультиплікативної складової.

У мультиплікативній схемі для обліку погрішностей розрахункових моделей R і S розглядаються умови працездатності виду

$$R - fS > 0 \quad (5.6)$$

або

$$\frac{R}{f} - S > 0, \quad (5.7)$$

де f – має значення коефіцієнта безпеки (нормативного коефіцієнта запасу).

За аналогією з детерміністичним проектуванням розглядаються також моделі

$$r'_0 R(\bar{X}) - s'_0 S(\bar{Y}) > 0,$$

де $r'_0 = \frac{R}{R'(\bar{X})}$, $s'_0 = \frac{S}{S'(\bar{Y})}$; $R'(\bar{X})$, $S'(\bar{Y})$ – розрахункові значення несучої здатності й навантаження, отримані згідно з розрахунковими методиками; R , S – точні значення навантаження і несучої здатності, визначені за результатами випробувань. Шляхом нескладних перетворень остання нерівність може бути зведена до (5.6).

З позиції адитивної похибки умову (5.1) можна подати у вигляді

$$R(\bar{X}) + r''_0 - (S(\bar{Y}) + s''_0) > 0,$$

де $r_0'' = R_E - R_P$, $s_0'' = S_E - S_P$; R_E, R_P, S_E, S_P – експериментальні й розрахункові значення несучої здатності й навантаження. Така модель адекватна умові працездатності

$$Z + z_0 = R - S + z_0 > 0, \quad (5.8)$$

де z_0 – абсолютна сумарна погрішність моделі працездатності; або

$$R - S - m_R \varepsilon > 0,$$

де ε – відносна сумарна похибка моделі працездатності.

Можна показати, що адитивна похибка z_0 виражається з використанням коефіцієнта безпеки, для цього (5.8) трансформується таким чином

$$R - S - R \frac{f - 1}{f} > 0$$

звідки $z_0 = -R \frac{f - 1}{f}$.

Отже, кожний із використовуваних способів урахування погрішностей може бути зведений до моделі з коефіцієнтом безпеки (5.6).

В умови працездатності при імовірнісній проектуванні коефіцієнти безпеки, можуть входити детермінованими або випадковими величинами. Другий варіант є більш складним у методологічному плані, адже вимагає імовірнісного опису коефіцієнтів безпеки у вигляді числових характеристик або імовірнісних розподілів.

Стосовно накопиченої статистичної інформації щодо функціонування ТС розрізняють наступні два види коефіцієнтів безпеки:

- коефіцієнти безпеки, задані спочатку й незмінні в процесі проектування й експлуатації ТС. Як правило, такі коефіцієнти вважаються у відповідних умовах працездатності детермінованими величинами;
- коефіцієнти безпеки, значення яких визначаються на підставі обробки статистичної інформації про функціонування ТС або її аналога на етапах експериментального відпрацювання й експлуатації. Цей підхід обґрунтований тим, що при відпрацюванні й експлуатації накопичується інформація з функціональної здатності ТС, тим самим з'являється можливість уточнити модель працездатності. У цьому випадку коефіцієнти безпеки можуть входити в (5.1) як випадкові або детерміновані величини, значення яких отримані на підставі обробки статистичної інформації по навантаженнях і несучій здатності.

По відношенню до величин R і S , які визначають коефіцієнт безпеки, розрізняють два види коефіцієнтів безпеки: центральні й екстремальні (рисунок 5.2). Під центральним коефіцієнтом безпеки розуміється відношення математичних сподівань несучої здатності R і навантаження S

$$\bar{f} = \frac{m_R}{m_S}. \quad (5.9)$$

Відповідно, під екстремальним розуміється відношення мінімальної несучої здатності до максимального навантаження, що діє на ТС

$$f' = \frac{R_{\min}}{S_{\max}}. \quad (5.10)$$

Коефіцієнт безпеки у формі (5.9) використовують у своїх розрахунках фахівці з надійності. Практика міцнісних розрахунків несучих конструкцій, показала, що задані нормативні коефіцієнти безпеки, трактуються підрозділами, що займаються питаннями міцності, як екстремальні у формі (5.10).

В якості R_{\min} , S_{\max} у імовірнісному проектуванні приймаються значення, імовірність вийти за які у край низька. Ці граничні значення можна визначити наступним чином

$$\begin{aligned} R_{\min} &= m_R - \lambda_R \sigma_R, \\ S_{\max} &= m_S + \lambda_S \sigma_S, \end{aligned} \quad (5.11)$$

де λ_R , λ_S – параметри, які характеризують значення R_{\min} , S_{\max} в долях середніх квадратичних відхилень. У цьому випадку екстремальний коефіцієнт безпеки можна переписати у вигляді

$$f' = \frac{m_R - \lambda_R \sigma_R}{m_S + \lambda_S \sigma_S} = \frac{\frac{m_R}{m_S} - \lambda_R \frac{\sigma_R}{m_S}}{1 + \lambda_S \frac{\sigma_S}{m_S}} = \bar{f} \frac{1 - \lambda_R \gamma_R}{1 + \lambda_S \gamma_S}, \quad (5.12)$$

або навпаки

$$\bar{f} = f' \frac{1 + \lambda_S \gamma_S}{1 - \lambda_R \gamma_R}. \quad (5.13)$$

де γ_R , γ_S – відповідно коефіцієнти варіації несучої здатності й навантаження.

Формули (5.12), (5.13) виражають залежність центрального й екстремального коефіцієнтів безпеки. Зрозуміло, що екстремальні коефіцієнти безпеки можна розглядати, як відповідні центральні, які перераховуються по наведених вище формулам і навпаки.

У розрахунках найчастіше приймається, що випадкові величини навантаження й несучої здатності відповідають нормальним законам. При визначенні навантажень

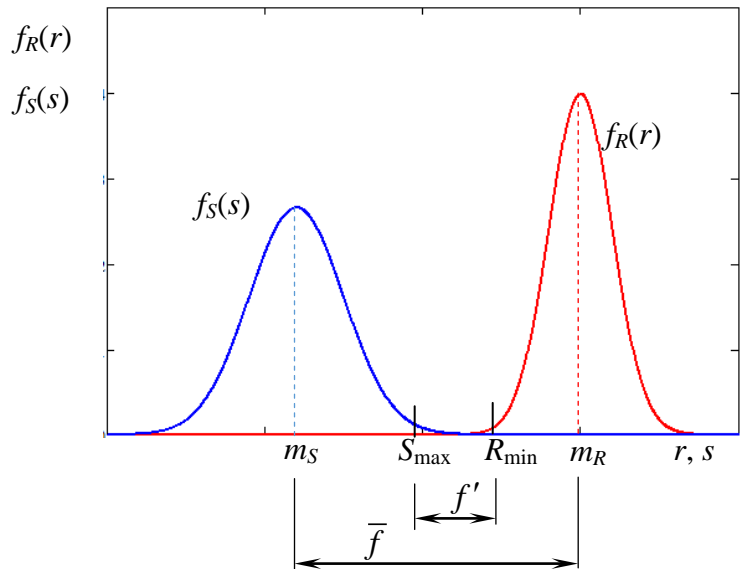


Рисунок 5.2 – Центральний і екстремальний коефіцієнт безпеки

граничне значення S_{\max} обирається з міркування $3\sigma_S$ відхилення ($S_{\max} = m_S + 3\sigma_S$). Несуча здатність переважно визначається геометричними розмірами й фізико-механічними характеристиками. При визначенні несучої здатності ці параметри беруться відповідно до граничних значень допусків, що йдуть у запас несучої

здатності. Ці відхилення параметрів МС також відповідають відхиленням $\pm 3\sigma_i$. У підсумку граничні відхилення несучої здатності R_{min} , відповідні до граничних значень допусків на параметри МС, перевищують відхилення в $3\sigma_R$ від математичного сподівання m_R . Проте для подальшої визначеності будемо вважати, що й граничне відхилення несучої здатності відповідає $3\sigma_R$ ($R_{min} = m_R - 3\sigma_R$). Таким чином, у якості значень, що характеризують граничні відхилення можна прийняти $\lambda_R = \lambda_S = 3$. Це забезпечує імовірність однобічного виходу випадкових величин R і S за межі (5.11), у випадку їх нормальних розподілів, яка дорівнює 0,00135. У таблиці 5.1 наведені значення центрального коефіцієнта безпеки \bar{f} для $f' = 1.25$ (найменший коефіцієнт безпеки, що використовувався в практиці проектування на підприємстві) в залежності від γ_R , γ_S при заданих $\lambda_R = \lambda_S = 3$.

Таблиця 5.1

Центральні коефіцієнти безпеки для екстремального коефіцієнта безпеки $f' = 1.25$ в залежності від коефіцієнтів варіації навантаження й несучої здатності

		γ_S									
		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
γ_R	0,01	1,327	1,366	1,405	1,443	1,482	1,521	1,559	1,598	1,637	1,675
	0,02	1,37	1,41	1,449	1,489	1,529	1,569	1,609	1,649	1,689	1,729
	0,03	1,415	1,456	1,497	1,538	1,58	1,621	1,662	1,703	1,745	1,786
	0,04	1,463	1,506	1,548	1,591	1,634	1,676	1,719	1,761	1,804	1,847
	0,05	1,515	1,559	1,603	1,647	1,691	1,735	1,779	1,824	1,868	1,912
	0,06	1,57	1,616	1,662	1,707	1,753	1,799	1,845	1,89	1,936	1,982
	0,07	1,63	1,677	1,725	1,772	1,82	1,867	1,915	1,962	2,009	2,057
	0,08	1,694	1,743	1,793	1,842	1,891	1,941	1,99	2,039	2,089	2,138
	0,09	1,764	1,815	1,866	1,918	1,969	2,021	2,072	2,123	2,175	2,226
	0,1	1,839	1,893	1,946	2,000	2,054	2,107	2,161	2,214	2,268	2,321

Таким чином, екстремальним коефіцієнтам безпеки відповідають **збільшені** (іноді суттєво) центральні коефіцієнти безпеки. Якщо враховувати, що коефіцієнти варіації навантаження зазвичай складають 10% і більше, бачимо, що екстремальним коефіцієнтам безпеки відповідають значно більші значення центрального коефіцієнту безпеки.

Необхідно відзначити, що екстремальні коефіцієнти безпеки в плані використання є більш гнучкими у порівнянні із центральними. Так збільшення надійності (потенційної несучої здатності) прийнято проводити наступними способами:

- розносом математичних сподівань навантаження й несучої здатності;
- зменшенням розкидів несучої здатності й, по можливості, навантаження.

Центральний коефіцієнт безпеки через свою природу відображає перший спосіб, проте зовсім нечутливий до іншого. Навпаки, екстремальний коефіцієнт адекватно описує обидва способи підвищення надійності відповідно до (5.13).

5.2 Вплив коефіцієнтів безпеки на імовірність безвідмовної роботи

Введення в умови працездатності деяких коефіцієнтів, що знижують реальну несучу здатність або завищують діюче експлуатаційне навантаження, безпосередньо впливає на надійність. Існує тісна залежність між коефіцієнтом безпеки й ІБР конструкції. Очевидно, великі значення коефіцієнтів безпеки забезпечують високі значення показників безвідмовності. Проте, слід підкреслити, що наявність деякого нормативного коефіцієнта в умовах (5.1), однозначно не визначає надійність. В дійсності за одного і того коефіцієнту безпеки вид умови працездатності, імовірнісні характеристики параметрів, що визначають навантаження й несучу здатність, вносять розкид у значення ІБР.

Зв'язок коефіцієнтів безпеки й ІБР зазвичай описують двома способами: параметричним і непараметричним. У рамках параметричного підходу задаються певними законами розподілу ВВ навантаження й несучої здатності й одержують відповідні залежності показника надійності при відомих значеннях коефіцієнта безпеки. Для другого підходу характерне отримання результатів у вигляді нижніх меж ІБР без прив'язки до конкретного розподілу.

Нас буде цікавити насамперед вплив екстремальних коефіцієнтів безпеки на показники надійності.

Параметричний підхід

Для простоти розглянемо одну умову працездатності (5.1). Найбільш простий вираз зв'язку між коефіцієнтом безпеки й ІБР утворюється у випадку, коли ВВ R й S незалежні і відповідають нормальним законам з параметрами (m_R, σ_R) , (m_S, σ_S)

$$P = \Phi \left(\frac{\bar{f} - 1}{\sqrt{\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2}} \right). \quad (5.14)$$

(отримати формулу самостійно, виходячи з (2.15))

Припускаючи, що ВВ R и S нормальні й корельовані отримуємо наступну залежність між ІБР та коефіцієнтом безпеки

$$P = \Phi \left(\frac{\bar{f} - 1}{\sqrt{\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2 - 2\bar{f} \rho_{RS} \gamma_R \gamma_S}} \right). \quad (5.15)$$

В рамках моделі, яка враховує характеристики скосу й ексцесу ВВ R и S , можна скористуватися для апроксимації останніх розподілом Грам-Шарльє. ІБР у цьому випадку визначається по формулі

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 1 + \frac{\beta_{1Z}}{3!} (\lambda^2 - 1) + \frac{\beta_{2Z}}{4!} (\lambda^3 - 3\lambda) \right\} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2} \right), \quad (5.16)$$

де

$$\lambda = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\bar{f} - 1}{\sqrt{\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2}},$$

$$\beta_{1Z} = \frac{\beta_{1R} \sigma_R^3 - \beta_{1S} \sigma_S^3}{\left(\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}\right)^3} = \frac{\beta_{1R} \bar{f}^3 \gamma_R^3 - \beta_{1S} \gamma_S^3}{\left(\sqrt{\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2}\right)^3},$$

$$\beta_{2Z} = \frac{\beta_{2R} \sigma_R^4 + \beta_{2S} \sigma_S^4}{\left(\sigma_R^2 + \sigma_S^2\right)^2} = \frac{\beta_{2R} \bar{f}^3 \gamma_R^4 + \beta_{2S} \gamma_S^4}{\left(\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2\right)^2},$$

$\beta_{1R}, \beta_{1S}, \beta_{2R}, \beta_{2S}$ – відповідно коефіцієнти скосу й ексцесу розподілів ВВ навантаження й міцності.

Розрахунки показують, що для випадку $f' = 1.25$, $\gamma_R, \gamma_S \leq 0,1$ та нормальних законів ВВ R й S при $\lambda_R = \lambda_S = 3$ значеннях ІБР виходять не гірше за 0,999997. Різниця в значеннях ІБР, отриманих по формулам (5.15), (5.16), у цьому випадку практично не відчутна. Таким чином, параметричний підхід дає завищені оцінки надійності, що є природнім.

Непараметричний підхід

Непараметричні (без прив'язки до конкретного розподілу) методи, дають результати у вигляді нижніх меж ІБР. Зручність такого підходу полягає в тому, що в більшості випадків дійсні розподіли ВВ R і S можуть бути невідомими. Приведемо деякі способи такої оцінки.

Використовуючи нерівність Бенъєме-Чебышова для коефіцієнта запасу η (5.2), який вважається випадковою величиною, в [9] знайдено наступний вираз для нижньої межі ІБР

$$P \geq 1 - \frac{\bar{f}^2 \left[\left(1 + \gamma_R^2\right) \left(1 + 3\gamma_S^2\right) + k_* (k_* - 2) \left(1 + \gamma_S^2\right)^2 \right]}{\left[k_* \bar{f} (1 + \gamma_S^2) - 1 \right]^2}, \quad (5.17)$$

$$\text{де } k_* = \frac{\bar{f} \left[\left(1 + \gamma_R^2\right) \left(1 + 3\gamma_S^2\right) / \left(1 + \gamma_S^2\right) \right] - 1}{\bar{f} (1 + \gamma_S^2) - 1}.$$

$$\text{Нерівність Бенъєме-Чебишева для ВВ } \Pr(|\eta - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M[(\eta - a)^2]}{\varepsilon^2}$$

Інші способи. Для умови працездатності (5.1) можна розглянути наступний вираз для імовірності відмови [20]

$$P_e = \Pr\{Z \leq 0\} < \Pr(|z - c| \geq c).$$

Далі на основі нерівності Бенъєме-Чебишева, шляхом мінімізації імовірності P_e , може бути визначено нижню межу ІБР

$$P > 1 - \frac{\sigma_Z^2}{m_Z^2 + \sigma_Z^2}.$$

Якщо припустити, що ВВ R й S незалежні

$$P > 1 - \frac{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}{(m_R - m_S)^2 + \sigma_R^2 + \sigma_S^2},$$

$$P > 1 - \frac{\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2}{(\bar{f} - 1)^2 + \bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2}. \quad (5.18)$$

Оцінки нижньої межі (5.18) можна підсилити, якщо додатково припустити, що розподіл Z одномодальний, математичне сподівання збігається з модою й крива густини має нескінченний ступінь зіткнення з віссю абсцис на великому видаленні від центру групування. У цьому випадку замість нерівності Бенъєме-Чебишева можна використовувати посилену нерівність, для якої утворюються наступні оцінки нижньої межі ІБР

$$P > 1 - \frac{4}{9} \frac{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}{(m_R - m_S)^2},$$

$$P > 1 - \frac{4}{9} \frac{\bar{f}^2 \gamma_R^2 + \gamma_S^2}{(\bar{f} - 1)^2}. \quad (5.19)$$

Для побудови залежності нижньої межі ІБР від коефіцієнта безпеки деякими авторами використовується той факт, що розподіли випадкових величин у зонах екстремальних відхилень описуються деякими граничними формами. Так поведінка широко використовуваних для опису ВВ розподілів навантаження й несучої здатності, на «хвостах» можна апроксимувати функціями, пов'язаними з екстремальними розподілами. В якості функції розподілу правого «хвоста» ВВ навантаження на інтервалі $s > m_S + 1,75\sigma_S$ запропоновано використовувати

$$F(s) = 1 - \exp[-\lambda(s - a)], \quad (5.20)$$

і відповідну їй диференційну форму

$$f(s) = \lambda \exp[-\lambda(s - a)],$$

де $\lambda = \frac{1}{\sigma_S}$, $a = m_S - \sigma_S$.

Для лівого «хвоста» розподілу несучої спроможності на ділянці $0 < r < m_R - 1,5\sigma_R$ рекомендується наступний вираз для функції розподілу й міцності

$$F(r) = \left(\frac{r}{b}\right)^\alpha, \quad (5.21)$$

$$f(r) = \frac{\alpha}{b} \left(\frac{r}{b}\right)^{\alpha-1},$$

де $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_R^2}} - 1$, $b = \frac{m_R(\alpha + 1)}{\alpha}$.

Зручність наведеного підходу опису «хвостів» полягає в тому, що параметри граничних функцій (5.20) і (5.21) виражаються в термінах числових характеристик вихідного розподілу.

ІБР у випадку апроксимації «хвостів» ВВ R і S може бути визначена в такий спосіб

$$P = 1 - \left\{ \exp[-\lambda(b - a)] + \lambda \int_a^b \left(\frac{s}{b}\right)^\alpha \exp[-\lambda(s - a)] ds \right\}.$$

або

$$P = 1 - \left\{ \exp(a_3 - a_1) + a_1 \int_{a_2}^1 t^\alpha \exp(-a_1 t + a_3) dt \right\}, \quad (5.22)$$

де $a_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \bar{f} \frac{1}{\gamma_S}$, $a_2 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{1}{\bar{f}} (1 - \gamma_S)$, $a_3 = \frac{1}{\gamma_S} - 1$.

Результати моделювання залежності нижніх меж ІБР і коефіцієнтів безпеки для розглянутих вище непараметричних моделей приведені на рис. 5.3, 5.4. На рисунках крива 1, 2, 3, 4 отримана з використанням формул (5.17), (5.18), (5.19), (5.22) відповідно.

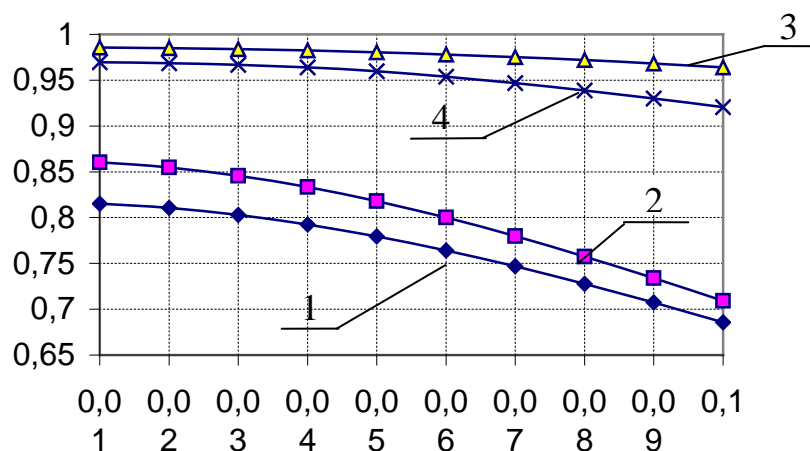


Рисунок 5.3 - Нижні межі ІБР для центрального коефіцієнта безпеки $\bar{f} = 1.25$, $\gamma_S = 0,1$.

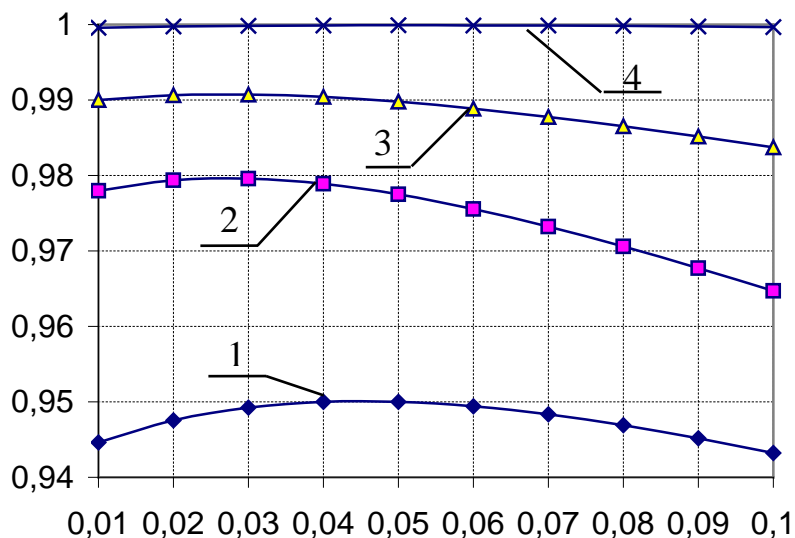


Рисунок 5.4 - Нижні межі ІБР для екстремального коефіцієнта безпеки $f' = 1.25$, $\lambda_R = \lambda_S = 3$, $\gamma_S = 0,1$.

Найбільш низькі межі оцінки ІБР дає формула (5.17) на неї й слід орієнтуватися в практичних розрахунках.

5.3 Використання інформації о коефіцієнтах безпеки при визначенні надійності в процесі експериментального відпрацювання

Експериментальне відпрацювання МС, як правило, малочисельне (обмежений обсяг дослідного відпрацювання обумовлений високою вартістю проведення експериментів). У цих умовах для визначення показника безвідмовності МС широке поширення знайшли байєсовські методи, що використовують різну додаткову інформацію, наприклад, у вигляді апіорної густини розподілу ІБР МС (дивись розділ 2).

При відомих нормативних коефіцієнтах безпеки, які використовуються в процесі проектування, можна визначити нижню межу ІБР, яку використовувати як нижню границю апіорного розподілу.

Як показують випробування МС і математичне моделювання процесів, що в них протікають, втрату працездатності МС визначають один, два типи відмов (критичні відмови), а інші типи відмов практично не проявляються (імовірність їх появу нескінченно мала). Вони відповідають одній або двом критичним умовам (по іншим запаси несучої здатності набагато перевищують запас працездатності по критичній умові). Таким чином, можна вважати, що коефіцієнт безпеки f' визначає нижню межу ІБР $P_n = P_n(f, \gamma_R, \gamma_S)$ для МС в цілому. Якщо визначальних умов працездатності дві, тоді для системи в цілому можна прийняти нижній рівень надійності $P_n(f, \gamma_R, \gamma_S)^2$. З урахуванням гарантованого забезпечення надійності слід вибирати модель, що дає найменші значення $P_n = P_n(f, \gamma_R, \gamma_S)$, тобто (5.17).

З позицій принципу невизначеності в якості апіорного розподілу ІБР, яка вважається ВВ, звичайно вибирається рівномірний закон, який у цьому випадку запишеться в такий спосіб

$$h(p) = \frac{1}{1 - P_n} p \in [P_n, 1], \quad (5.23)$$

де P_n – нижня межа ІБР, яка визначається коефіцієнтом безпеки.

Виходячи з (5.23) для апостеріорної густини отримуємо наступний вираз:

$$\hat{h}(p) = \frac{p^m (1-p)^d}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^{d-i} \frac{1 - P_n^{n-i+1}}{n-i+1}},$$

а байєсовська оцінка надійності має вигляд (дивись також)

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^{d-i} \frac{1 - P_n^{n-i+2}}{n-i+2}}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^{d-i} \frac{1 - P_n^{n-i+1}}{n-i+1}}. \quad (5.24)$$

Точність отриманої байєсовської оцінки ІБР характеризується середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^{d-i} \frac{1 - P_H^{n-i+3}}{n-i+3}}{\sum_{i=0}^d C_d^i (-1)^{d-i} \frac{1 - P_H^{n-i+1}}{n-i+1}} - \hat{P}^2. \quad (5.25)$$

Приклад. Розробку ТС проведено традиційними детермінованими методами, використовуючи коефіцієнт безпеки, що дорівнює 1,25 (методика розробки ТС дає підстави розглядати його як екстремальний). Для граничних значень навантаження та несучої здатності прийнято $\lambda_R = \lambda_S = 3$. Коефіцієнти варіації навантаження $\gamma_S = 0,1$, несучої здатності $\gamma_R = 0,05$. Нехай в процесі експериментального відпрацювання проведено десять безвідмовних випробувань ТС. Якщо не враховувати інформацію, яку надає коефіцієнт безпеки, то згідно формули (2.30), отримаємо ІБР, що дорівнює 0,9583. Для ТС найхарактернішим є один тип відмови, що визначає одну визначальну умову працездатності. Для розрахунку P_H використано вираз (5.17), який дає рівень 0,95. Використовуючи формули (5.24), (5.25), отримуємо значення ІБР $\hat{P} = 0,9771$ і $\sigma_{\hat{P}} = 0,0143$.

Тема 6 ІМОВІРНІСНЕ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ РКТ

Процес проектування конструкцій РКТ, зазвичай, має детермінований характер, таким чином значення конструктивних параметрів визначаються традиційними методами на основі існуючих детермінованих моделей працездатності. В подальшому для спроектованої конструкції визначається ІБР. У разі, якщо вимоги до надійності не виконуються параметри конструкції змінюються. Процес продовжують аж допоки не буде задовільнено вимогу з надійності. Проте може бути поставлено задачу в процесі розробки конструкції ТС одночасно врахувати вимоги до надійності, тобто задачі проектування й забезпечення надійності поєднуються й вирішуються спільно. Це задача імовірнісного проектування. Головна відмінність імовірнісного проектування полягає в тому, що параметри проектування розглядаються як випадкові величини. Задача вирішується в рамках лінійної моделі, згідно якої приймається, що параметри процесу проектування (вхідні і вихідні параметри) вважаються незалежними нормальними випадковими величинами (дивись (2.9) - (2.11)).

6.1 Проектування з урахуванням вимог до надійності

У низці відносно простих випадків задача проектування з урахуванням вимог до надійності може бути вирішена в рамках лінійної моделі в такий спосіб. Нехай працездатність ТС описується однією умовою з одним керуючим параметром, яку може бути формалізовано у вигляді

$$Z = \varphi(\bar{X}, u) > 0,$$

де \bar{X} – вектор первинних змінних (діючі навантаження, фізико-механічні характеристики, параметри конструкції) з відомими й незмінними в процесі проектування числовими характеристиками; u – керуючий параметр (зазвичай, параметр конструкції), числові характеристики якого (а саме, m_u , σ_u) підлягають визначенню в процесі проектування. При цьому задана вимога щодо надійності $P \geq P_{\text{потр}}$.

Додатково припустимо, що відомим є коефіцієнт варіації для керуючого параметра процесу проектування γ_u . Таким чином,

$$\sigma_u = m_u \gamma_u = f(m_u).$$

Виходячи із цього зрозуміло, що математичне сподівання ЗС Z та її середнє квадратичне відхилення (дивися формули для визначення m_Z і σ_Z) виявляються функціями лише одного параметра – m_u

$$m_Z = \varphi(\bar{m}, m_u);$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \Big|_{\bar{m}, m_u} \right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{\bar{m}, m_u} \right)^2 \sigma_u^2,$$

де \bar{m} – вектор математичних сподівань первинних змінних \bar{X} , а σ_i – їх середні квадратичні відхилення.

Для визначення m_u необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{m_Z(m_u)}{\sigma_Z(m_u)} = t_\gamma, \quad (6.1)$$

де t_γ – квантиль нормального розподілу, що відповідає ймовірності $P_{\text{потр}}$. Він визначається наступним чином

$$t_\gamma = \Phi^{(-)}(P_{\text{номр}}),$$

де $\Phi^{(-)}$ – функція обернена до функції Лапласа.

Отже розв'язавши рівняння (6.1), знаходимо значення математичного сподівання керуючого параметра процесу проектування, що забезпечує виконання вимог до надійності.

В якості прикладу розглянемо наступну задачу. Треба спроектувати опукле сферичне днище баку окиснювача РН (рис. 6.1) радіуса R , яке навантажено внутрішнім тиском P з урахуванням вимог до надійності ($P_{\text{потр}}$). Матеріал оболонки днища бака - АМГ-6.

Умова працездатності, на основі якої має здійснюватися проектний розрахунок, має вигляд

$$\sigma_\sigma - \frac{f_p PR}{2\delta} \geq 0, \quad (6.2)$$

де σ_σ – межа міцності матеріалу оболонки днища; P – діючий внутрішній тиск, R – радіус сферичної оболонки; δ – товщина оболонки; f_p – коефіцієнт безпеки.

Проаналізуємо параметри моделі проектування (6.2). Всі параметри (за винятком f_p) є випадковими величинами. Будемо вважати їх незалежними і нормальними, тобто вони характеризуються двома параметрами: математичним сподіванням (m) і середнім квадратичним відхиленням (σ).

Номінал ВВ $P - m_p$ і розкид (поле допуску) ΔP (визначає σ_p) забезпечуються системою наддування ступеня РН і визначаються із умов безкавітаційної роботи рідинного ракетного двигуна.

Номінал ВВ R обрано із конструктивних міркувань (треба забезпечити певний об'єм), а розкид ΔR (визначає σ_R) визначається технологією і умовами виробництва.

Числові характеристики ВВ $m_{\sigma_\sigma}, \sigma_{\sigma_\sigma}$ – визначаються умовами поставки заготовок.

Отже на параметри ВВ P, R, σ_σ розробник може впливати незначною мірою. Наприклад, можемо зробити більш жорсткими умови виробництва і зменшити σ_R (тобто допуск на R), тим самим збільшуючи вартість виробництва і можливо необхідність модернізації виробничого обладнання.

Таким чином, керуючим параметром в задачі проектування є δ – товщина оболонки днища. Враховуючи, що це ВВ треба вибрати m_δ, σ_δ (номінал і розкид). Середнє квадратичне відхилення σ_δ може бути задано безпосередньо, виходячи із можливої технології отримання кінцевої товщини оболонки (можливості виробництва). З іншого боку ми можемо визначити його виходячи з коефіцієнту варіації γ_δ , який будемо вважати нам відомим. В цьому випадку

$$\sigma_\delta(m_\delta) = \gamma_\delta \cdot m_\delta.$$

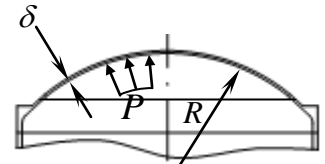


Рисунок 6.1 – Верхнє сферичне днище баку окислювача РН

Отже керуючим параметром процесу оптимізації буде m_δ .

Визначимо математичне сподівання ЗС Z та її середнє квадратичне відхилення. Згідно формул методу лінеаризації запишемо

$$m_Z(m_\delta) = m_{\sigma_e} - \frac{f_p m_p m_R}{2m_\delta};$$

$$\sigma_Z^2(m_\delta) = \sigma_{\sigma_e}^2 + \frac{f_p^2 m_R^2 \sigma_P^2}{4m_\delta^2} + \frac{f_p^2 m_P^2 \sigma_R^2}{4m_\delta^2} + \frac{f_p^2 m_P^2 m_R^2}{4m_\delta^4} \gamma_\delta^2 m_\delta^2 =$$

$$= \sigma_{\sigma_e}^2 + \frac{1}{4m_\delta^2} \left[f_p^2 m_R^2 \sigma_P^2 + f_p^2 m_P^2 \sigma_R^2 + f_p^2 m_P^2 m_R^2 \gamma_\delta^2 \right].$$

Отже виходячи з потрібного рівня імовірності безвідмовної роботи, будемо мати наступне рівняння

$$\frac{m_{\sigma_e} - \frac{f_p m_p m_R}{2m_\delta}}{\sqrt{\sigma_{\sigma_e}^2 + \frac{1}{4m_\delta^2} \left[f_p^2 m_R^2 \sigma_P^2 + f_p^2 m_P^2 \sigma_R^2 + f_p^2 m_P^2 m_R^2 \gamma_\delta^2 \right]}} = t_\gamma.$$

Позначимо $f_p^2 m_R^2 \sigma_P^2 + f_p^2 m_P^2 \sigma_R^2 + f_p^2 m_P^2 m_R^2 \gamma_\delta^2 = A$ і запишемо

$$\frac{m_{\sigma_e} - \frac{f_p m_p m_R}{2m_\delta}}{\frac{1}{2m_\delta} \sqrt{4m_\delta^2 \sigma_{\sigma_e}^2 + A}} = t_\gamma.$$

Після нескладних перетворень отримуємо алгебраїчне рівняння відносно m_δ

$$\frac{2m_\delta m_{\sigma_e} - f_p m_p m_R}{\sqrt{4m_\delta^2 \sigma_{\sigma_e}^2 + A}} = t_\gamma.$$

Воно може бути безпосередньо розв'язане з використанням чисельних методів, проте шляхом нескладних перетворень рівняння може бути перетворено до звичайного квадратного рівняння

$$4m_{\sigma_e}^2 m_\delta^2 - 4f_p m_p m_R m_{\sigma_e} m_\delta + f_p^2 m_P^2 m_R^2 = t_\gamma^2 (4\sigma_{\sigma_e}^2 m_\delta^2 + A)$$

і далі

$$4(m_{\sigma_e}^2 - t_\gamma^2 \sigma_{\sigma_e}^2) m_\delta^2 - 4f_p m_p m_R m_{\sigma_e} m_\delta + f_p^2 m_P^2 m_R^2 - t_\gamma^2 A = 0.$$

Позначимо

$$4(m_{\sigma_e}^2 - t_\gamma^2 \sigma_{\sigma_e}^2) = a;$$

$$4f_p m_p m_R m_{\sigma_e} = b;$$

$$f_p^2 m_P^2 m_R^2 - t_\gamma^2 A = c.$$

В підсумку отримуємо квадратне рівняння $am_\delta^2 - bm_\delta + c = 0$, яке може бути розв'язане стандартними методами.

На рис. 6.2 показано розв'язання задачі проектування опуклого сферичного днища баку окиснювача РН з урахуванням вимог до надійності з використанням пакету математичних обчислювань MathCAD для наступних вихідних даних $P = 0,35$ МПа (врахувати коефіцієнт безпеки 1,3), $R = 1,6$ м, $\sigma_B = 320$ МПа, $P_{\text{потр}} = 0,9999$, та коефіцієнтів варіації параметрів $\gamma_P = 0,15$, $\gamma_{\sigma_B} = 0,07$, $\gamma_R = 0,03$, $\gamma_{\delta} = 0,02$.

Задача. Проектування верхнього сферичного днища баку окисника з урахуванням вимог до надійності

ВИХІДНІ ДАНІ

Номінали $m_{\sigma_B} := 320 \cdot 10^6$ Па $m_P := 0.35 \cdot 10^6$ Па $m_R := 1.6$ м
 $f_p := 1.3$ коефіцієнт безпеки

Коефіцієнти варіації

$\gamma_{\sigma_B} := 0.07$ $\gamma_P := 0.15$ $\gamma_R := 0.03$ $\gamma_{\delta} := 0.02$

Середні квадратичні відхилення

$\sigma_{\sigma_B} := m_{\sigma_B} \cdot \gamma_{\sigma_B}$ $\sigma_P := m_P \cdot \gamma_P$ $\sigma_R := m_R \cdot \gamma_R$

Керуючий параметр - m_{δ}

Умова працездатності

$$Z(\sigma_B, P, R, \delta) := \sigma_B - \frac{f_p \cdot P \cdot R}{2 \cdot \delta}$$

Перші похідні для нормальної моделі

$$f_1(\sigma_B, P, R, \delta) := \frac{d}{d\sigma_B} Z(\sigma_B, P, R, \delta)$$

$$f_2(\sigma_B, P, R, \delta) := \frac{d}{dP} Z(\sigma_B, P, R, \delta)$$

$$f_3(\sigma_B, P, R, \delta) := \frac{d}{dR} Z(\sigma_B, P, R, \delta)$$

$$f_4(\sigma_B, P, R, \delta) := \frac{d}{d\delta} Z(\sigma_B, P, R, \delta)$$

Математичне сподівання і дисперсія як функції керуючого параметра

$$m_Z(m_{\delta}) := m_{\sigma_B} - \frac{f_p \cdot m_P \cdot m_R}{2 \cdot m_{\delta}}$$

$$D(m_{\delta}) := \left(f_1(m_{\sigma_B}, m_P, m_R, m_{\delta})^2 \cdot \sigma_{\sigma_B}^2 + f_2(m_{\sigma_B}, m_P, m_R, m_{\delta})^2 \cdot \sigma_P^2 + f_3(m_{\sigma_B}, m_P, m_R, m_{\delta})^2 \cdot \sigma_R^2 \right) \dots + f_4(m_{\sigma_B}, m_P, m_R, m_{\delta})^2 \cdot (m_{\delta} \cdot \gamma_{\delta})^2$$

Рисунок 6.2 - Проектування опуклого сферичного днища баку окиснювача РН з урахуванням вимог до надійності

Виконання вимог до надійності

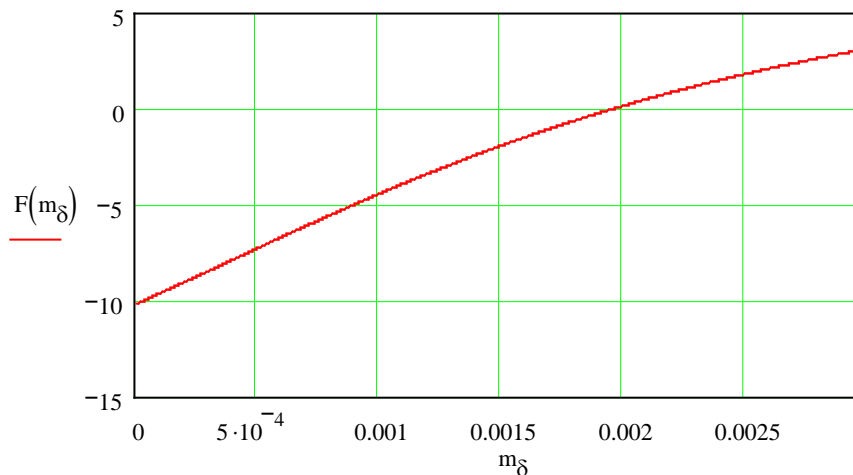
$$t := 3.72 \quad \text{snorm}(3.72) = 0.9999 \quad \text{Квантиль нормального розподілу, що відповідає ІБР 0,9999}$$

$$F(m_\delta) := \frac{m_Z(m_\delta)}{\sqrt{D(m_\delta)}} - t \quad \text{Рівняння, що пов'язує керуючий параметр і надійність}$$

Розв'язування рівняння

$$u := 0.001$$

$$\text{root}(F(u), u) = 1.967 \times 10^{-3}$$



Приймається товщина оболонки 2 мм

$$\text{snorm}\left(\frac{m_Z(0.002)}{\sqrt{D(0.002)}}\right) = 0.999939$$

Рисунок 6.2 (продовження) - Проектування опуклого сферичного днища баку окиснювача РН з урахуванням вимог до надійності

6.2 Імовірностне оптимальне проектування

Принциповим питанням у процесі проектування конструкцій ТС є забезпечення значення одного або сукупності значень техніко-економічних показників, таких як вага, вартість і т.п. при виконанні вимог до надійності. Оскільки структура ТС найчастіше буває визначена із загальних міркувань, отже задача полягає у виборі значень певної множини керуючих параметрів, які забезпечують екстремальне значення якого-небудь показника якості (наприклад, вартості системи або її ваги). При цьому показник безвідмовності спроектованої системи повинен бути не нижче певного необхідного рівня $P_{\text{потр}}$. Таким чином, математично задача імовірнісного оптимального проектування може бути сформульована в такий спосіб: необхідно забезпечити мінімум цільової функції якості

$$S(\bar{\theta}) \rightarrow \min$$

при виконанні вимог до безвідмовності $P(\bar{\theta}) \geq P_{номр}$,

з урахуванням виконання деяких обмежень виду $\psi_j(\bar{\theta}) \leq 0 \quad j = \overline{1, l}$,

де $\bar{\theta}$ - вектор параметрів, які можуть змінюватися усередині множини Θ (керуючі параметри).

У більшості випадків в якості керуючих параметрів обирають номінальні значення (математичні сподівання) і розкиди (середні квадратичні відхилення) конструктивних параметрів. Цьому є просте пояснення. Оскільки проектування конструкцій здійснюється для заздалегідь заданих навантажень, а вибір матеріалів здійснюється з більш загальних міркувань, то в розроблювача виявляються обмежені можливості варіювання значеннями числових характеристик навантажень і фізико-механічних характеристик. Таким чином, єдине на що розроблювач має можливість впливати - числові характеристики геометричних параметрів. Однак і тут є певні труднощі. Оскільки номінальні значення таких геометричних параметрів, як, наприклад, радіус оболонки бака, її довжина вибираються із загальних вимог, вони не можуть виступати в якості керуючих. Що стосується розкидів на геометричні параметри, то вони задаються відповідними керівними документами (державними стандартами, галузевими стандартами, нормальми та інш.). Із цього виходить, що в багатьох практичних випадках оптимізація не може привести до остаточних результатів, оскільки значення керуючих параметрів, обрані в процесі оптимізації уточнюються на основі обмежень, установлених державними стандартами, галузевими стандартами, нормальми тощо.

Вибір математичної моделі надійності продиктований фізичним змістом цільової функції й прийнятою схемою розрахунків ІБР. При цьому показник безвідмовності представляється у вигляді функції керуючих параметрів. Треба відзначити, що умова виконання вимог до надійності зручніше представляти у вигляді рівності, тому що будь-яке перевищення рівня $P_{номр}$ зазвичай призводить до збільшення цільової функції.

У якості додаткових обмежень можуть виступати технологічні обмеження, обмеження з герметичності тощо.

Постановка задачі для конкретної системи включає визначення цільової функції якості залежно від значень проектних параметрів. Запис функції якості системи $S(\bar{\theta})$, зазвичай не представляє яких-небудь серйозних ускладнень.

Урахувати обмеження типу рівності й нерівності й звести задачі оптимального проектування до безумовної мінімізації дозволяє використання узагальненої цільової функції виду (виходить із методу штрафних функцій)

$$F(\bar{\theta}) = S(\bar{\theta}) + t \left\{ \left| P(\bar{\theta}) - P_{номр} \right| + \sum_{j=1}^l \max(\psi_j(\bar{\theta}), 0) \right\},$$

де t - штрафний коефіцієнт.

Приклад. Розглянемо задачу вибору оптимальних параметрів циліндричної оболонки вафельного типу (дивись рис. 6.3) довжиною L і

радіусом r , виготовлену зі сплаву АМгбН. Перетин стінки вафлі оболонки (квадратна комірка) описується чотирма параметрами:

- товщиною вихідного листа (початкова товщина) $\delta_{\text{поч}}$;
- товщиною полотна δ ;
- кроком ребер b ;
- шириною ребер c .

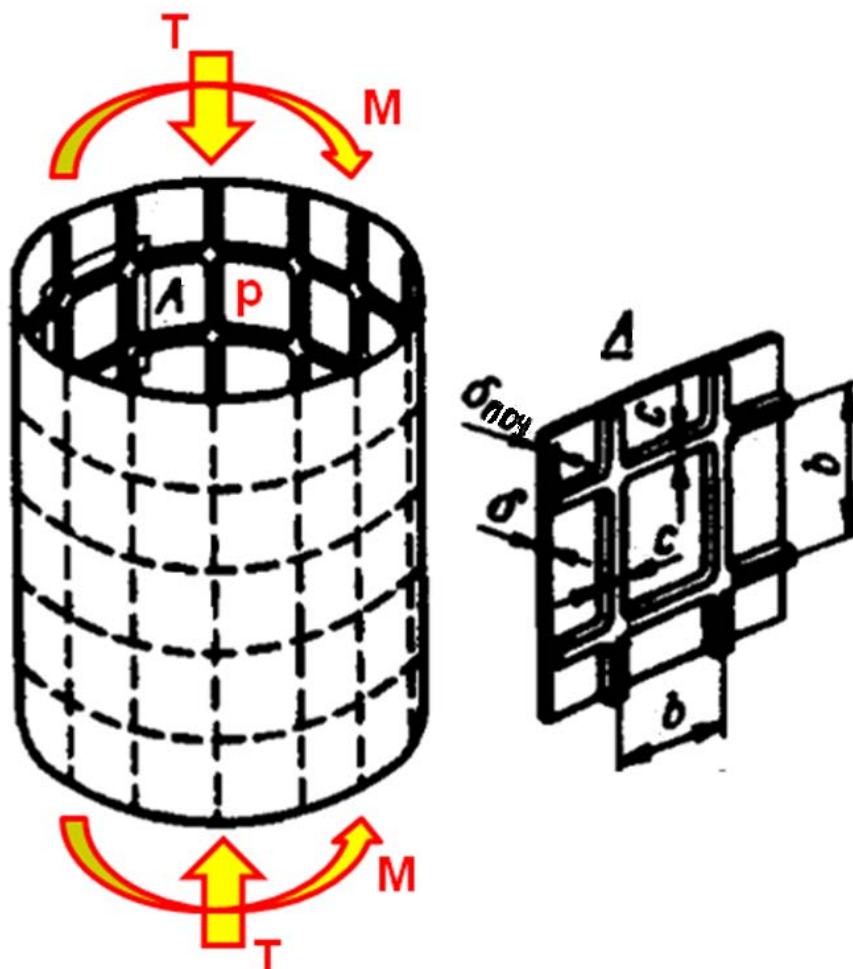


Рисунок 6.3 - Схема вафельної оболонки

Оболонку навантажено осьовою стискаючою силою T , згинальним моментом M і внутрішнім надлишковим тиском p .

У якості цільової функції розглядається вага конструкції

$$G = \gamma \{ 2\pi r (L\delta + chN_k) + N_n ch(h - cN_k) \},$$

де $h = \delta_{\text{поч}} - \delta$ – висота ребра вафлі, $N_k = \left[\frac{L}{b+c} \right]$ – кількість кільцевих ребер;

$N_n = \left[\frac{2\pi r}{b+c} \right]$ – кількість поздовжніх ребер, $[\bullet]$ – функція одержання цілої частини; γ – питома вага матеріалу оболонки.

Для такої оболонки розглядається три граничні стани: втрата міцності, втрата загальної й місцевої стійкості. Їм відповідають три умови працездатності:

$$Z_1 = \sigma_e - \frac{b \max \left| pr - \frac{T}{\pi r} \pm \frac{M}{2r^2} \right|}{b\delta + c(\delta_{\text{поч}} - \delta)} \geq 0,$$

$$Z_2 = 2\pi k E \delta^2 \left[1 + \alpha(\beta - 1)^2 \left(\frac{0,4}{\sqrt[3]{\alpha}} + \frac{1,3}{\sqrt{\beta}} - 0,54 \right) \right] - \left(T + \frac{M}{r} - \pi r^2 p \right) \geq 0,$$

$$Z_3 = 12\pi E \frac{r\delta^3}{(b-c)^2} [1 + 0,16\alpha(\beta - 1)] - \left(T + \frac{M}{r} - \pi r^2 p \right) \geq 0,$$

де $\alpha = \frac{2\pi c}{b}$, $\beta = \frac{\delta_{\text{поч}}}{\delta}$, k – коефіцієнт стійкості оболонки; σ_e , E – межа міцності й модуль пружності матеріалу.

Оскільки значення радіуса оболонки та її довжини задано із загального компонування, в якості керуючих параметрів мають розглядатися математичні сподівання наступних первинних змінних: $\delta_{\text{поч}}$, δ , b , c . Функцію надійності в припущенні незалежності граничних станів можна записати у вигляді

$$P(\bar{\theta}) = \prod_{i=1}^3 P(Z_i \geq 0).$$

При формулюванні задачі було застосовані наступні обмеження

$$3\delta - \delta_{\text{поч}} \leq 0,$$

$$\delta \geq 0,0015.$$

Вихідні дані для розрахунків $r = 1,5$ м, $L = 4$ м, $P_{\text{потр}} = 0,99$, числові характеристик інших характеристик і параметрів наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

X_i	$T \cdot 10^{-6}$ Н	$M \cdot 10^{-5}$ Н·м	$p \cdot 10^{-5}$ Н/м ²	$E \cdot 10^{-10}$ Н/м ²	$\sigma_e \cdot 10^{-8}$ Н/м ²	k	$\delta_{\text{поч}} \cdot 10^2$ м	$\delta \cdot 10^2$ м	b , м	$c \cdot 10^2$, м
m_i	1,37	3,92	0,98	6,45	1,74	0,31	0,60	0,20	0,1	1,2
σ_i	0,07	0,20	0,02	0,06	0,02	0,01	0,01	0,01	0,001	0,01

У таблиці 6.1 в останніх чотирьох колонках заштриховані початкові значення керуючих параметрів.

Проміжки зміни керуючих параметрів задавалися в такий спосіб

$$\delta_{\text{поч}} \in [0,005 \text{ м}, 0,012 \text{ м}],$$

$$\delta \in [0,0015 \text{ м}, 0,006 \text{ м}],$$

$$b \in [0,08 \text{ м}, 0,15 \text{ м}],$$

$$c \in [0,003 \text{ м}, 0,030 \text{ м}].$$

У результаті оптимізації цільової функції отримані наступні значення керуючих параметрів

$$\delta_{\text{поч}} = 0,0087 \text{ м},$$

$$\delta = 0,0015 \text{ м},$$

$$b = 0,10 \text{ м},$$

$$c = 0,003 \text{ м},$$

які забезпечують необхідний рівень надійності 0,99 при вазі оболонки 1870 Н.

Для порівняння детерміністичне проектування дало $\delta_{\text{поч}} = 0,0055$ м, $\delta = 0,002$ м, $b = 0,11$ м, $c = 0,011$ м. Їм відповідає вага оболонки 2387 Н.

Завдання для самостійної роботи

1. Спроекувати гладке опукле верхнє днище бака пального (рис. 6.4) радіусу R , що знаходиться під дією зовнішнього тиску ($p_{\text{зов}}$) з урахуванням вимог до надійності ($P_{\text{потр}}$). Матеріал днища АМг-6.

Параметри процесу проектування вважати незалежними і нормальними.

Вихідні дані: $p_{\text{зов}} = 0,22$ МПа, $R = 1,6$ м, $P_{\text{потр}} = 0,9999$. Для отримання середніх квадратичних відхилень випадкових величин використати коефіцієнти варіації $\gamma_{p_{\text{зов}}} = 0,12$, $\gamma_R = 0,03$, $\gamma_{\delta} = 0,03$.

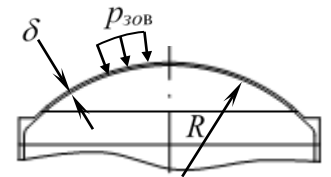


Рисунок 6.4 – Верхнє сферичне днище баку пального

2. Спроекувати міжступеневу ферму РКП мінімальної маси, що складається з $N=10$ стрижнів трубчастого перерізу при заданих: довжині стрижнів l (обрано з конструктивних міркувань), стискаючому навантаженні T , що діє на кожен із стрижнів і матеріалі ферми (визначає модуль Юнга) з урахуванням вимог до надійності ($P_{\text{потр}}$).

а). Врахувати втрату стійкості за формулою Ейлера.

б). Врахувати дві умови працездатності: втрату стійкості за формулою Ейлера і загальну втрату стійкості стрижня як оболонки ($k = 0,15$).

Параметри процесу проектування вважати незалежними і нормальними.

Рекомендації. В якості керуючих параметрів розглянути радіус поперечного перерізу труби (r) та товщину труби (δ). Законцівки/торцеві шпангоути ферми при визначенні маси і надійності не враховувати. Всі труби працюють незалежно.

Вихідні дані: $T = 1,7 \cdot 10^4$ кгс (врахувати коефіцієнт безпеки 1,3), $l = 190$ см, $E = 1,9 \cdot 10^5$ кгс/см², $P_{\text{потр}} = 0,9999$. Середні квадратичні відхилення параметрів $\sigma_T = 1,7 \cdot 10^3$ кгс; $\sigma_l = 0,2$ см; $\sigma_E = 9,5 \cdot 10^3$ кгс/см². Для отримання середніх квадратичних відхилень випадкових величин r і δ використати коефіцієнти варіації $\gamma_r = 0,03$, $\gamma_{\delta} = 0,05$.

3. Спроекувати торовий балон високого тиску (рис. 6.5) мінімальної маси (габарити R , r , робочий тиск $p_{\text{вн}}$) об'ємом V з урахуванням вимог до надійності ($P_{\text{потр}}$), а також обмежень на його габарити (L_{min} , L_{max}). Матеріал баку титановий сплав.

Параметри процесу проектування вважати незалежними і нормальними.

Рекомендація. В якості керуючих параметрів розглянути радіуси (R , r) та товщину оболонки (δ).

Вихідні дані: $p_{\text{вн}} = 30$ МПа (врахувати коефіцієнт

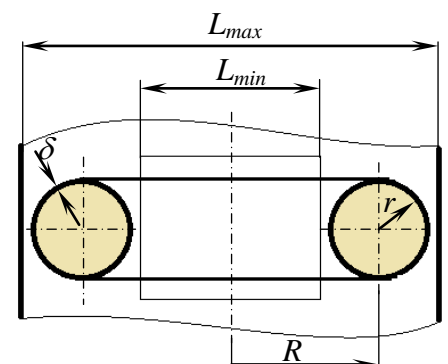


Рисунок 6.5 – Торовий балон

безпеки 1,3), $V = 0,2 \text{ м}^3$, $\sigma_6 = 900 \text{ МПа}$, $P_{\text{потр}} = 0,9999$, $L_{\text{min}} = 2 \text{ м}$, $L_{\text{max}} = 3 \text{ м}$. Для отримання середніх квадратичних відхилень параметрів використати коефіцієнти варіації $\gamma_{p_{\text{вн}}} = 0,15$, $\gamma_{\sigma_6} = 0,07$, $\gamma_r = 0,03$, $\gamma_\delta = 0,02$.

Література

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1971. – 292 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. Волков Е.Б., Судаков Р.С., Сырицын Т.А. Основы теории надежности ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.
4. Гладкий В.Ф. Вероятностные методы проектирования конструкций летательных аппаратов. – М.: Наука, 1982. – 270 с.
5. Гладкий Э.Г. Использование двумерной нормальной связи в моделях параметрической надежности // Техническая механика. – Днепр: ИТМ НАН и ГКА Украины. – 2018. – №4. С. 105-118.
6. Гладкий Э.Г. Нормирование надежности технической системы с использованием информационного подхода // Космическая техника. Ракетное вооружение: сб. науч.-техн. тр. – Дн-ск: ГП «КБ «Южное», 2016. – Вып. 2. – С. 9 – 15.
7. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
8. Гнеденко Б.В. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 томах. – М.: Машиностроение, 1987. Т.2. Математические методы в теории надежности и эффективности. – 280 с.
9. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. - М.: Мир. 1980. - 604с.
- 10.Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. - М.: Наука, 1966. - 588с.
- 11.Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. 648с.
- 12.Ллойд Л., Липов М. Надежность. Организация, исследования, методы, математический аппарат. – М.: Советское радио, 1964. – 668 с.
- 13.Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. - 576 с.
- 14.Никозаков Д.Д., Перлик В.И., Кукушкин В.И. Статистическая оптимизация конструкций летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.
- 15.Перлик В.И. Методология надежности механических систем летательных аппаратов// Космическая техника. Ракетное вооружение. – Дн-ск: ГКБЮ. – 1995. – Вып.1–2. – С.37 – 43.
- 16.Перлик В. И., Гладкий Э.Г., Палий А.В. Сокращение объема вычислений показателя надежности механических систем методом функций работоспособности Космическая техника. Ракетное вооружение. Сб. науч. тр. – Дн-ск: ГКБЮ. – 1994. – Вып. 3 с. 37-43
- 17.Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. М.: Наука. 1989. - 328 с.
- 18.Смирнов Н.В., Дунин–Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). – М.: Наука, 1965. – 512 с.
- 19.Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. - М.: Мир, 1969 - 396 с.

20. Mischke C. A method of relating factor of safety and reliability // Journal of Engineering for Industry (J. Eng. Ind. Trans. ASME). – 1970. – Vol. 92(3). – P. 537–579.
21. Karian Z., Dudewicz E. Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods. – Chapman and Hall, New York, 2000. – 438 p.