Державне підприємство
"Конструкторське бюро "Південне" ім. М.К. Янгеля"

УПРАВЛІННЯ РУХОМ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ: МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПІДСИСТЕМИ ЇХНЬОЇ ОРІЄНТАЦІЇ

Навчально-методичний посібник

Розробник: Провідний науковий співробітник
к.т.н., професор, В.С. Хорошилов

Підготував: Зав. аспірантури Н.П. Зикова

ДНІПРО

2023

Зміст

СКОРОЧЕННЯ ТА ПОЗНАЧЕННЯ....3
ВСТУП....4
1 ОПИС МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОУО....11
1.1 Системи координат....11
1.2 Параметри орбітального руху КА....13
1.3 Динамічне рівняння....15
1.4 Кінематика руху КА навколо центру мас....15
1.5 Діючі на КА моменти....17
1.6 Моделі МПЗ....19
1.7 Модель верхньої атмосфери....21
2 УПРАВЛІННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ КА....23
2.1 Управління орієнтацією КА у режимах РУПСО і РСО....23
2.2 Управління розгрузкою ДМ в РУПСО і РСО....25
2.3 Управління орієнтацією КА в РПП....26
2.4 Управління орієнтацією КА в РОСК....29
2.5 Управління розгрузкою ДМ в РОСК....31
3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИСТРОЇВ ПОУО....33
3.1 Математична модель магнітометра....33
3.2 Математична модель ЕМ....36
3.3 Математична модель ИУС....37
3.4 Математична модель сонячного датчика....39
3.5 Математична модель ДМ....39
3.6 Математична модель зоряного датчика....40
4 АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ....41
4.1 Опис алгоритму....41
4.2 Обчислення кутів орієнтації КА....41
4.3 Обчислення кута між напрямом на Сонце і віссю OZ ССК....42
ЛІТЕРАТУРА....43

СКОРОЧЕННЯ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

У даному навчально-методичному посібнику прийняті наступні скорочення:

АИС	–	астровимірювальна система;
БЦВМ	-	бортова цифрова обчислювальна машина
ДМ	–	двигун-маховик;
ДОК	–	датчик орієнтації комбінований;
ИД	–	початкові дані;
ИСК	–	інерціальна система координат;
ИУС	–	вимірювач кутової швидкості;
КА	–	космічний апарат;
КСК	–	конструкторська система координат;
МПЗ	–	магнітне поле Землі;
ОСК	–	орбітальная система координат;
ПО	–	підсистема орієнтації;
ПОУО	–	підсистема визначення і управління орієнтацією;
РОСК	–	режим орієнтації в орбітальній системі координат;
РСО	–	режим сонячної орієнтації;
РУПСО	–	режим заспокоєння і побудови сонячної орієнтації;
РФП	–	режим функціональних перевірок;
СУ	–	Система управління
ССК	–	зв'язана система координат;
ТЗ	–	технічне завдання;
УМП	–	навчально-методичний посібник;
ЕМ	–	електромагніт.

При описі математичної моделі керованого руху КА вводять такі позначення:

- одиничні вектори і орти осей систем координат позначаються малими літерами латинського алфавіту, виділеними шрифтом "жирний курсив"; індекс при орті вказує номер осі системи координат;
- для позначення інших векторів використовуються літери латинського і грецького алфавітів з надкресленням;
- тензорні величини позначаються великими літерами латинського алфавіту з подвійним надкресленням;
- для позначення матриць переходу від однієї системи координат до іншої використовують великі літери латинського алфавіту з подвійним надкресленням і двома нижніми індексами: перший позначає результуючу систему координат, а другий – вихідну;
- верхні індекси при векторних і тензорних величинах позначають систему координат, у якій ці величини записані;
- для позначення кватерніонів використовуються літери латинського і грецького алфавітів, виділені шрифтом "жирний";
- операції множення позначаються такими символами:

а) $\cdot$ – арифметичне множення, скалярне множення векторів, множення матриці на вектор, множення матриці на матрицю;

б) x – векторне множення векторів;

в) $\circ$ – множення кватерніонів.

ВСТУП

Під час розроблення космічних літальних апаратів (КА) випускають технічні завдання (ТЗ) на розроблення підсистем КА, зокрема підсистеми його орієнтації (ПО). ДП "КБ "Південне" останнім часом розробляло, головним чином, теми оптико-електронного спостереження Землі: Egyptsat-1, "Січ-2" (КА МС 2 8), "Січ 2 1". У темі "Січ-2" ПО - це підсистема визначення та управління орієнтацією (ПОУО) КА.

Найповніше питання ПОУО, зокрема роботу підсистеми в різних її режимах, розглянуто у рамках теми "Січ-2" [1, 2]. Тому таку назву ПО, а також можливі режими роботи ПОУО, що розглядаються в цьому навчально-методичному посібнику (УМП), прийнято за аналогією з КА МС-2-8.

Для перевірки відповідності функціональних характеристик ПОУО вимогам ТЗ на розроблення цієї підсистеми проводять моделювання керованого руху КА в різних режимах роботи ПОУО. Для проведення моделювання розробляють комп'ютерну програму. Для розроблення цієї програми необхідне знання математичної моделі ПОУО і вихідних даних у частині КА як об'єкта керування.

В.1 Загальні теореми динаміки

Розглядають рух центру мас КА та рух навколо його центру мас. Розгляд базується на загальних теоремах динаміки (теоремах про рух тіла під дією прикладених до нього сил): теоремі про зміну кількості руху системи (добутку маси на швидкість) і теоремі про зміну моменту кількості руху системи [3].

Першу теорему представляє співвідношення, яке формулюється так: векторна похідна за часом від кількості руху системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до системи.

Другу теорему представляє співвідношення, яке формулюється так: векторна похідна за часом від головного моменту кількості руху системи дорівнює головному моменту зовнішніх сил прикладених до системи, взятому відносно того самого центру,

У цьому УМП основна увага приділяється руху КА навколо його центру мас.

В.2 Склад системи орієнтації КА

Під ПО (ПОУО) будемо розуміти сукупність пристроїв, що забезпечують потрібну орієнтацію КА. Ця сукупність до свого складу включає датчики, блок логіки (логічно - перетворювальний блок) і виконавчі органи.

В.3 Виконавчі органи ПОУО

Серед виконавчих органів розглянемо органи, засновані на реактивних принципах:

- управляючі реактивні двигуни орієнтації, що створюють реактивні сили (використання такого типу виконавчих органів ПО у разі КА, що не містить рухомих мас, розглянуто у роботі [4]);
- інерційні виконавчі органи (силові гіроскопи, гіросилові стабілізатори), що створюють реактивні моменти.

Використаємо одну з можливих класифікацій силових гіроскопів – за кількістю ступенів свободи відносно корпусу КА, якими володіє гіро-силовий стабілізатор. Тут мають бути три випадки: коли ротор (гіроскоп) має один, два або три ступені свободи.

У цьому УМП розглянемо, як і на КА розроблених ДП "КБ "Південне" тем, в якості виконавчих органів одностепеневі гіроскопи - двигуни - маховики (ДМ).

В.4 Схеми встановлення ДМ

У системах керування (СУ) рухом КА активного типу часто використовують ДМ в якості виконавчих органів ПОУО. Для керування просторовим рухом навколо центру мас КА застосовують зазвичай три ДМ і встановлюють їх за осями зв'язаної системи координат (ССК). Ця схема відома як "класична схема" установки ДМ.

З метою підвищення надійності функціонування СУ іноді встановлюють ще четвертий ДМ. Четвертий ДМ являє собою ненавантажений резерв на випадок відмови одного з трьох основних ДМ. Ця схема встановлення ДМ відома як "стандарт NASA" і застосовується на багатьох КА. Під час реалізації схеми "стандарт NASA" у процесі управління ДМ повідомляють КА прискорення, обернено пропорційні відповідним осьовим моментам інерції КА.

Під час розроблення ПОУО КА за темами Egyptsat-1, "Січ-2" (КА МС 2 8), "Січ 2 1" реалізовано схему встановлення ДМ, наведену на рис. 1. Три основні ДМ встановлюються по осях ССК. Четвертий (резервний) ДМ встановлюється таким чином, щоб вектор його кінетичного моменту був спрямований під рівними кутами до осей ССК КА.

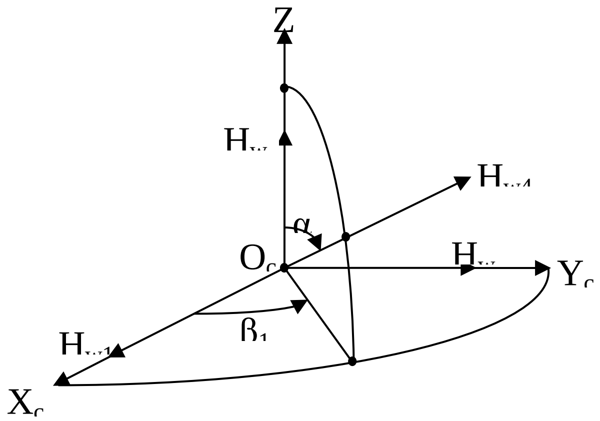

Рис. 1

На рис. 1 позначено:

α_1, β_1 – кути установки ДМ відносно ССК КА, β_1=45°;

H_{w1} … H_{w4} – вектори кінетичних моментів ДМ1 … ДМ4.

Кут α_1 визначається з умови однакової величини проекцій вектора H_{w4} на осі ССК:

$H_{4x} = H_{4y} = H_{4z}$; $H_{4x} = \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot H_{w4}$,

$H_{4y} = \sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot H_{w4}$, $H_{4z} = \cos\alpha_1 \cdot H_{w4}$.

Звідси випливає: $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 1/\cos\beta_1$, α_1 = 54°44'8".

Матриця установки ДМ i (i = 1...4) має вигляд:

D =

	ДМ1	ДМ2	ДМ3	ДМ4
X	1	0	0	$1/\sqrt{3}$
Y	0	1	0	$1/\sqrt{3}$
Z	0	0	1	$1/\sqrt{3}$

Проекції кінетичних моментів ДМ1 … ДМ4 на осі ССК визначаються зі співвідношення

$$\vec{\mathrm{H}} = \mathrm{D} \cdot \vec{\mathrm{H}}_w$$

На жаль, така схема установки не забезпечує можливість реалізації рівної ефективності (кутового прискорення) в усіх каналах керування КА.

Під час розв'язання деяких завдань із використанням у складі КА СУ активного типу виникає потреба в значному збільшенні в окремих каналах ефективності управління (створюваного ДМ прискорення), як порівняти з тією, що отримують під час реалізації "класичної схеми" або схеми "стандарт NASA" встановлення ДМ.

У такому разі також використовуються чотири ДМ, але на відміну від схеми "стандарт NASA" одночасно працюють усі чотири ДМ.

Відомі різні схеми встановлення чотирьох ДМ, що одночасно працюють: схема фірми General Electric (GE), модифікована схема фірми GE ("модифікована GE") [5]. СУ з такими схемами встановлення ДМ менш чутливі до відмов будь-якого одного ДМ.

НПП "Хартрон-Аркос" запропонувало наступний (інший) варіант схеми установки ДМ – схему установки "піраміда", наведену на рис. 2.

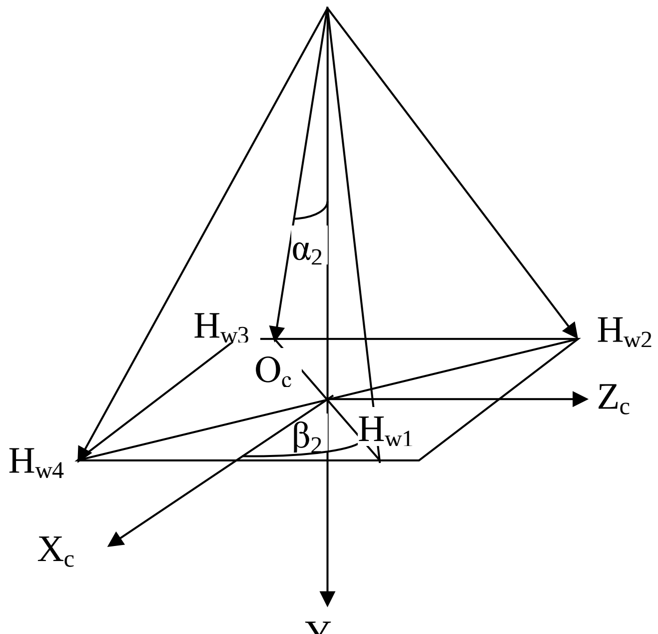

Рис. 2

На рис. 2 позначено:

α_2, β_2 - кути установки ДМ відносно ССК КА; віссю симетрії схеми установки може бути будь-яка вісь ССК, наприклад, вісь O_cY_c.

Матриця установки D для варіанта "піраміда" має вигляд:

D =

ДМ1	ДМ2	ДМ3	ДМ4
$\sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2$	$-\sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2$	$-\sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2$	$\sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2$
$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_2$
$\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2$	$\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2$	$-\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2$	$-\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2$

Кути установки α_2, β_2 пропонується вибирати за умови забезпечення рівної ефективності ДМ по всіх каналах управління, тобто

$$\frac{4 \cdot \dot{H}_{wm} \cdot \sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2}{I_{XX}} = \frac{4 \cdot \dot{H}_{wm} \cdot \cos\alpha_2}{I_{YY}} = \frac{4 \cdot \dot{H}_{wm} \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2}{I_{ZZ}}.$$

Тут I – осьові моменти інерції КА.

В такому випадку

$$\mathrm{tg}\,\beta_2 = \frac{I_{ZZ}}{I_{XX}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{I_{XX}}{I_{YY} \cdot \cos\beta_2},$$

$$\alpha_2 = 52°01'22'', \beta_2 = 41°35'21''.$$

Управляючі сигнали на ДМ за такої установки формуються так само, як і при установці за прийнятим у ДП "КБ "Південне" варіантом:

$$\varepsilon = D^+ \cdot б,$$

де $б = (б_X, б_Y, б_Z)^т$ – вектор керуючих сигналів у проекціях на оси ССК КА;

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^т$ – вектор управлячих сигналів на осі ДМ з виходу БЦВМ,

$$D^+ = D^т (D \cdot D^т)^{-1}.$$

Схема установки "піраміда" забезпечує:

• однакову ефективність у всіх каналах управління КА;

• більш рівномірне завантаження ДМ як за одночасної роботі чотирьох ДМ, і при відмові одного з них;

• можливість застосування ДМ з меншим кінетичним та управляючим моментами (і відповідно меншою вагою) порівняно з варіантом, реалізованим на КА ДП "КБ "Південне", для повідомлення КА однакової кутової швидкості та прискорення.

ДМ можуть, взагалі кажучи, функціонувати лише у поєднанні з іншими типами виконавчих органів ПОУО, тобто у принципі вимагають двоконтурної системи виконавчих органів. Як другий контур можуть бути застосовані виконавчі органи, що використовують взаємодію із зовнішнім середовищем. Розглянемо зовнішні по відношенню до КА сили – магнітні.

Можлива побудова програмного забезпечення з використанням магнітних сил у всіх режимах підсистеми. Побудова таких ПО (магнітних) потребує окремого розгляду в рамках УМП. Вимагає (у рамках УМП) окремого розгляду також варіант виконавчих органів, коли ротор (гіроскоп) має два ступені свободи.

При розробці теми «Січ-2» було ухвалено рішення, відповідно до якого апаратура корисного навантаження дистанційного зондування Землі та панелі сонячної батареї жорстко закріплювалися у корпусі КА. Причому на КА цієї теми з метою забезпечення позитивного енергобалансу підсистеми електропостачання КА у перервах між сеансами зйомки реалізувалася орієнтація КА на Сонце.

З урахуванням цього рішення сформульовано призначення ПОУО. ПОУО призначене для:

• гасіння кутових швидкостей, що одержуються КА при його відокремленні від ракети-носія (РН);

• початкової побудови одновісної орієнтації осі OcZc зв'язаної системи координат (ССК) КА на Сонце протягом заданого часу;

• одновісної орієнтації осі OcZc ССК КА на Сонці із заданою точністю (на сонячній та тіньовій ділянках орбіти) після початкової побудови орієнтації на Сонці та у перервах між режимами зйомки (для збільшення енергоресурсів та зниження енергоспоживання підсистеми);

• реалізації програмних поворотів КА щодо орбітальної системи координат (ОСК):

1) на задані кути,

2) на задані кути з урахуванням додаткових поворотів КА по тангажу, крену та рисканню для забезпечення перпендикулярності ПЗС-лінійок приладів корисного навантаження до вектора швидкості видимого руху зображення підстилаючої поверхні Землі, а також збільшення часу спостереження;

• стабілізації із заданою точністю у поверненому положенні для виконання наступних режимів зйомки:

1) режим панхроматичної трасової зйомки;

2) режим багатоспектральної трасової зйомки;

3) режим інфрачервоної трасової зйомки;

4) режим стереоскопічної трасової зйомки;

• визначення орієнтації КА у проміжках між сеансами зйомки;

• визначення орієнтації КА щодо ОСК під час виконання програмних поворотів та зйомки.

Склад ПОУО представлений таким чином:

• зірковий датчик (астровимірювальна система (ИУС) – 1 шт.;

• комплект вимірювачів вектора кутової швидкості (ВІШ) – 1 шт.;

• датчик Сонця (датчик орієнтації комбінований (ДОК)) – 2 шт.;

• магнітометр (ММ) – 1 шт.;

• двигун-маховик (ДМ) – 4 шт.;

• магнітний виконавчий орган (електромагніт ЕМ) – 3 шт.;

• програмне забезпечення (ПЗ).

З призначення ПОУО, визначено такі режими роботи підсистеми:

• РУПСО – режим заспокоєння та побудови одновісної орієнтації КА на Сонце;

• РСО – режим підтримки одновісної орієнтації КА на Сонце;

• РПП – режим програмних поворотів КА та його стабілізації у повернутих положеннях;

• РОСК – режим триосної орієнтації КА в ОСК;

• РФП – режим функціональних перевірок.

РУПСО призначений для гасіння кутової швидкості, отриманої КА при відділенні від ракети-носія, початкової побудови одновісної орієнтації осі OZ ССК на Сонці та стабілізації КА.

У режимі РУПСО виконуються такі задачі:

• діагностика приладів та вибір робочої конфігурації РУПСО;

• гасіння початкових кутових швидкостей КА до порогових значень у каналах крену, тангажу та рискання;

• орієнтація та стабілізація осі OZ ССК КА на Сонці;

• визначення кутової орієнтації КА в ОСК;

• визначення положення Сонця в ССК;

• визначення положення КА на орбіті.

Гасіння початкової кутової швидкості КА виконується за інформацією ИУС та магнітометра, в якості виконавчих органів ПОУО використовуються три ЕМ, встановлені вздовж осей ССК; побудова одновісної орієнтації осі OZ ССК на Сонці виконується за інформацією ИУС, сонячного датчика та магнітометра, в якості виконавчих органів ПОУО використовуються три ДМ, встановлені вздовж осей ССК.

Визначення положення центру мас КА на орбіті виконується магнітним контуром навігації та з використанням інформації приймача GPS.

Визначення кутової орієнтації КА в ОСК виконується за інформацією ММ, ИУС та навігаційно-балістичної інформації (НБІ).

РСО призначений для підтримки одновісної орієнтації осі OZ ССК на Сонці та стабілізації КА із заданою точністю після початкової побудови орієнтації та в проміжках між сеансами зйомки.

У режимі РСО виконуються такі задачі:

• орієнтація та стабілізація осі $O_C Z_C$ ССК КА на Сонці;

• визначення положення Сонця в ССК;

• визначення положення КА на орбіті;

• розвантаження ДМ;

• планування часу початку режиму РПП;

• початкова виставка безплатформної інерційної системи (БІНС) перед початком режиму РПП.

Підтримка орієнтації КА виконується за інформацією ИУС, сонячного датчика та магнітометра. Як виконавчі органи управління ПОУО в РСО використовуються три ДМ. При необхідності скидання кінетичних моментів, що накопичилися (розвантаження) ДМ здійснюється з використанням ЕМ.

Визначення положення КА на орбіті виконується магнітним контуром навігації та з використанням інформації приймача GPS. Визначення кутової орієнтації КА в ОСК виконується за інформацією ММ, ИУС та НБИ.

РПП призначений для прецизійної орієнтації КА в ОСК та різних повернутих положеннях.

У режимі РПП виконуються такі задачі:

• програмні повороти КА із положення одновісної орієнтації на Сонце в положення тривісної орієнтації в ОСК;

• повороти щодо ОСК на задані кути та стабілізація у повернутому положенні;

• програмні повороти у програмно-колійній системі координат (ППСК);

• визначення кутової орієнтації КА в ОСК;

• визначення положення КА на орбіті;

• включення, діагностика та отримання інформації від зіркового датчика (ЗД);

• виставка БІНС за інформацією ЗД перед початком програмних поворотів;

• визначення положення Сонця в ОСК.

ПОУО в режимі РПП виконує програмні повороти в ОСК або ППСК згідно з переданим на борт масивом програмних поворотів.

Програмні повороти КА виконуються за інформацією ИУС, зоряного датчика, сонячного датчика та магнітометра. Як виконавчі органи ПОУО використовуються три ДМ. У РПП розвантаження ДМ не проводиться.

При роботі ПОУО в режимі РПП інформація про кутове положення КА в ОСК формується на основі БІНС, що коригується ЗД перед початком кожної ділянки стабілізації (ділянки зйомки), та бортового прогнозу руху центра мас КА.

РОСК призначений для забезпечення тривісної орієнтації КА в ОСК із заданою точністю при скиданні інформації з борту КА на Землю. Орієнтація КА в ОСК виконується за інформацією ИУС, сонячного датчика та магнітометра. Як виконавчі органи управління ПОУО в РОСК використовуються три ДМ. За потреби розвантаження ДМ здійснюється з використанням ЕМ.

РФП призначений для забезпечення перевірок ПОУО, тестування приладів ПОУО і відновлення працездатності ПОУО в польоті при нештатних ситуаціях.

УМП містить такі розділи:

• опис математичної моделі ПОУО КА (розділ 1);

• опис законів управління орієнтацією КА та розвантаженням ДМ у різних режимах роботи ПОУО (розділ 2);

• опис математичних моделей приладів ПОУО (розділ 3);

• опис алгоритмів, що забезпечують вирішення задачі моделювання керованого руху КА (розділ 4).

1 ОПИС МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОУО

Складові математичної моделі ПОУО:

- формули для розрахунку параметрів орбітального руху КА;
- система диференціальних рівнянь руху КА щодо центру мас (динамічне та кінематичне рівняння);
- вирази для обчислення моментів, що обурюють;
- моделі МПЗ та верхньої атмосфери;
- алгоритми управління роботою ПОУО;
- математичні моделі приладів ПОУО.

1.1 Системи координат

При описі математичної моделі ПОУО використані такі праві ортогональні системи координат:

$O_EX_iY_iZ_i$	інерційна система з початком у центрі Землі; вісь O_EY_i спрямована по осі обертання Землі, вісь O_EZ_i – у точку весняного рівнодення;
$O_EX_SY_SZ_S$	сонячно-еліптична система; вісь O_EZ_S спрямована по лінії Земля-Сонце, вісь O_EX_S паралельна дотичній до екліптики та направлена у бік руху Сонця з екліптики;
$O_EX_eY_eZ_e$	система, зв'язана з диполем МПЗ; вісь O_EY_e спрямована по осі диполя, вісь O_EZ_e – по лінії перетину площин магнітного та земного екваторів;
$O_dX_dY_dZ_d$	конструкторська система з початком у центрі кола, що лежить у площині стикування КА з носієм та проходить через центри трьох різьбових отворів під пірозамки; вісь O_dZ_d перпендикулярна площині стикування і спрямована у бік носія, осі O_dX_d, O_dY_d лежать у площині стикування, вісь OdXd спрямована у бік напівплощини стабілізації I;
$OX_oY_oZ_o$	орбітальна система з початком у центрі мас КА; вісь OZ_o спрямована по радіусу-вектору, що з'єднує центр Землі з центром мас КА, вісь OX_o – у напрямку польоту;
$OX_gY_gZ_g$	географічна система; вісь OZ_g спрямована вздовж радіуса-вектора, що з'єднує центр мас КА з центром Землі, вісь OX_g паралельна до меридіану і спрямована в бік географічної півночі Землі;
$OX_bY_bZ_b$	зв'язана система з початком у центрі мас КА; напрями осей ССК збігаються з напрямками осей ССК.

Послідовності поворотів при переходах від ИСК до сонячно-еліптичної системи, від ИСК до системи, зв'язаної з диполем МПЗ, від ИСК до ОСК і від ОСК до ССК показані на рис. 1...4.

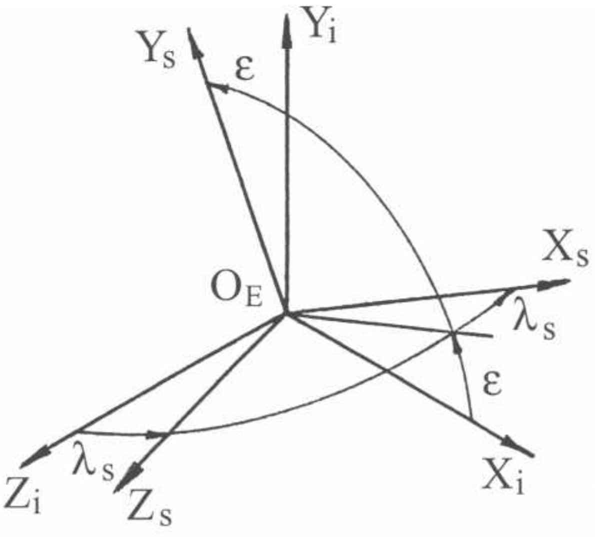

Рис. 1

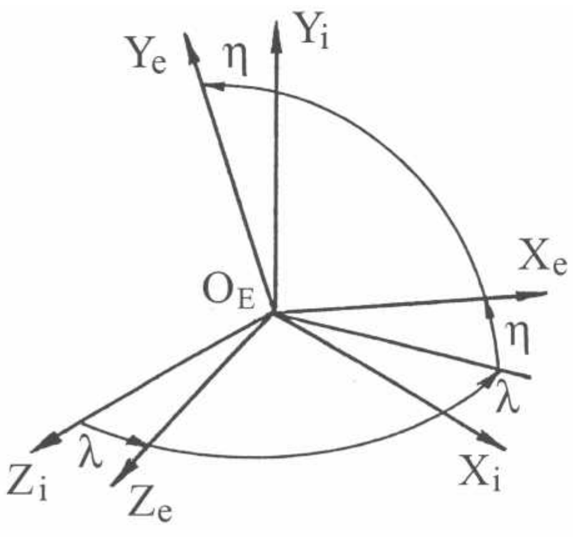

Рис. 2

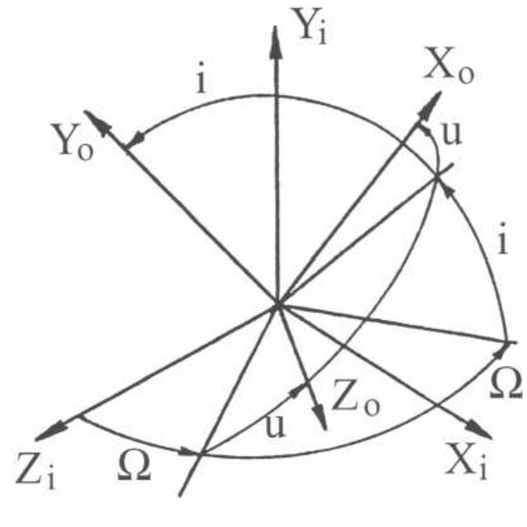

Рис. 3

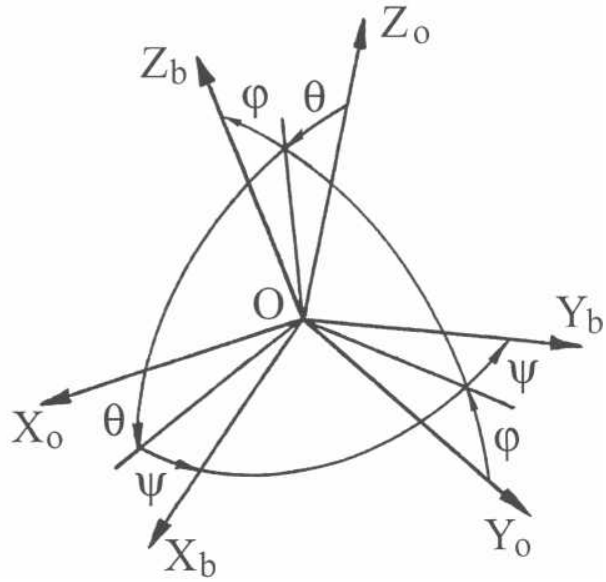

Рис. 4

1.2 Параметри орбітального руху КА

Орбітальні параметри визначаються наступними виразами:

$$\left.\begin{aligned}
&\nu(t) = M + \left(2\cdot e - \frac{e^3}{4}\right)\cdot \sin M + \frac{5}{4}\cdot e^2 \cdot \sin 2M + \frac{13}{12}\cdot e^3 \cdot \sin 3M;\\
&M = \omega_o \cdot (t - t_0); \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}; \qquad \dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu \cdot p}}{r^2};\\
&r = \frac{p}{1 + e\cdot\cos\nu}; \qquad p = a\cdot(1 - e^2);\\
&e = \frac{h_a - h_p}{h_a + h_p + 2\cdot R}; \qquad a = \frac{h_a + h_p + 2\cdot R}{2};\\
&\Omega(t) = \Omega(t_0) + \dot{\Omega}\cdot(t - t_0);\\
&u(t) = \omega_p(t) + \nu(t);\\
&\omega_p(t) = \omega_p(t_0) + \dot{\omega}_p\cdot(t - t_0),
\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.1)$$

где ν – істинна аномалія;
M – середня аномалія;
ω_o – середня орбітальна кутова швидкість;
e – ексцентриситет;
a – велика піввісь;
p – фокальний параметр орбіти;
r – відстань від центру Землі до центру мас КА;
Ω – довгота висхідного вузла;
u – аргумент широти;
ω_p – аргумент перигея;
t, t_0 – поточний і початковий час відповідно;
$h_a h_p$ – висота апогея и перигея відповідно;
$\dot{\Omega}, \dot{\omega}_p, \dot{\nu}$ – похідні довготи висхідного вузла, аргументу перигея та істинної аномалії відповідно;
R=6371 км – середній радіус Землі;
μ =0б3986·10^{15} $м^3/с^2$ – гравітаційна постійна Землі.

Для орбит з ексцентриситетом e<0,1 похідні аргументу перигея и довготи висхідного вузла визначаються по формулах:

$$\dot{\omega}_p = 5 \cdot \left(\frac{R_e}{a}\right)^{7/2} \cdot \left(5 \cdot \cos^2 i - 1\right), \qquad {}^{\circ}/\text{сут.};$$

$$\dot{\Omega} = -10 \cdot \left(\frac{R_e}{a}\right)^{7/2} \cdot \cos i, \qquad {}^{\circ}/\text{сут.},$$

де R_c =6378 км – радіус Землі на екваторі;

i – нахил площини орбіти до площини екватора.

Згідно рис. 3, перехід від ИСК до ОСК визначається послідовністю поворотів на кути Ω, i, u. Власні кватерніони цих поворотів мають вигляд [6]

$$\mathbf{S}_1 = \cos\frac{\Omega}{2} + \boldsymbol{e}_2 \cdot \sin\frac{\Omega}{2};$$
$$\mathbf{S}_2 = \cos\frac{i}{2} + \boldsymbol{e}_3 \cdot \sin\frac{i}{2};$$
$$\mathbf{S}_3 = \cos\frac{u}{2} + \boldsymbol{e}_2 \cdot \sin\frac{u}{2},$$

де e_1, e_2, e_3 – орти осей ИСК.

Тоді власний кватерніон $\mathbf{S} = s_0 + s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + s_3 \cdot e_3$ переходу від ИСК до ОСК дорівнює

$$S = S_1 \circ S_2 \circ S_3 = \left(\cos\frac{\Omega}{2} + \boldsymbol{e}_2 \cdot \sin\frac{\Omega}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{i}{2} + \boldsymbol{e}_3 \cdot \sin\frac{i}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{u}{2} + \boldsymbol{e}_2 \cdot \sin\frac{u}{2}\right).$$

Звідси можна виразити компоненти кватерніона **S** через кути Ω, i, u

$$s_0 = \cos\frac{i}{2} \cdot \cos\frac{\Omega + u}{2}; \qquad s_1 = \sin\frac{i}{2} \cdot \sin\frac{\Omega - u}{2};$$
$$s_2 = \cos\frac{i}{2} \cdot \sin\frac{\Omega + u}{2}; \qquad s_3 = \sin\frac{i}{2} \cdot \cos\frac{\Omega - u}{2}.$$

Елементи матриці $\overline{\overline{T}}_{oi}$ переходу від ИСК до ОСК можна виразити через компоненти кватерніона **S** наступним чином:

$$\overline{\overline{T}}_{oi} = \begin{vmatrix} s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 & 2 \cdot (s_1 \cdot s_2 + s_0 \cdot s_3) & 2 \cdot (s_1 \cdot s_3 - s_0 \cdot s_2) \\ 2 \cdot (s_1 \cdot s_2 - s_0 \cdot s_3) & s_0^2 + s_2^2 - s_1^2 - s_3^2 & 2 \cdot (s_2 \cdot s_3 + s_0 \cdot s_1) \\ 2 \cdot (s_1 \cdot s_3 + s_0 \cdot s_2) & 2 \cdot (s_2 \cdot s_3 - s_0 \cdot s_1) & s_0^2 + s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 \end{vmatrix}. \qquad (1.2.2)$$

Вектор $\overline{\omega}_{oi}^{o}$ куглової швидкості ОСК відносно ИСК у проекціях на осі ОСК визначається так

$$\overline{\omega}_{oi}^{o} = \dot{\overline{u}}^{o} + \overline{\overline{T}}_{oi} \cdot \dot{\overline{\Omega}}^{i}, \qquad (1.2.3)$$

де $\dot{\overline{u}}^{o} = \dot{\overline{\omega}}_p^{o} + \dot{\overline{v}}^{o}$ – вектор похідної аргументу широти;

$\dot{\overline{\omega}}_p^{o}, \dot{\overline{v}}^{o}, \dot{\overline{\Omega}}^{i}$ – відповідно вектори похідних аргументу перигея, істинної аномалії і довготи висхідного вузла, що визначаються як

$$\dot{\overline{\omega}}_p^{o} = \begin{vmatrix} 0, & \dot{\omega}_p, & 0 \end{vmatrix}^T; \qquad \dot{\overline{v}}^{o} = \begin{vmatrix} 0, & \dot{v}, & 0 \end{vmatrix}^T; \qquad \dot{\overline{\Omega}}^{i} = \begin{vmatrix} 0, & \dot{\Omega}, & 0 \end{vmatrix}^T.$$

1.3 Динамічне рівняння

Математична модель ПОУО включає до свого складу диференціальні рівняння: динамічне і кінематичне.

Динамічне рівняння залежить від виду виконавчих органів. У роботі [4] показано, що для випадку, коли викоритовуються управляючі реактивні двигуни орієнтації, що створюють реактивні сили, і КА не містить рухомих мас, динамічне рівняння приймає вигляд рівняння Ейлера із розділу теоретичної механіки «Динаміка твердого тіла».

Якщо в якості виконавчих органов ПОУО використовуються ДМ, то це вже випадок КА, що містить рухомі маси, і динамічне рівняння визначиться на основі закону зміни кінетического моменту КА.

Динамічне рівняння руху КА, що одержане у векторно-матричному вигляді на підставі закону зміни кінетичного моменту, має вигляд:

$$\dot{\overline{\omega}}_{bi}^{b} = \left(\overline{\overline{J}}^{b}\right)^{-1} \cdot \left(\overline{M}_{\Sigma}^{b} - \overline{\omega}_{bi}^{b} \times \overline{\overline{J}}^{b} \cdot \overline{\omega}_{bi}^{b} - \overline{\omega}_{bi}^{b} \times \overline{H}^{b}\right), \qquad (1.3.1)$$

де $\overline{\overline{J}}^{b}$ – тензор інерції КА;

$\overline{\omega}_{bi}^{b}, \dot{\overline{\omega}}_{bi}^{b}$ – вектори абсолютної кутової швидкості і прискорення КА;

– $\overline{M}_{\Sigma}^{b}$ сумарний вектор моментів, що діють на КА;

$\overline{H}^{b}$ – вектор кінетичного моменту ДМ.

Вектор $\overline{H}^{b}$ кінетичного моменту ДМ визачається як

$$\overline{H}^{b} = \left| H_x, \ H_y, \ H_z \right|^{T},$$

де H_x, H_y, H_z – кінетичні моменти ДМ, що установлені подовж осей ССК.

1.4 Кінематика руху КА навколо центру мас

У практиці часто окрім швидкостей і прискорень потрібно знання кутового положення КА.

Опис кутового руху тіла був потрібний вже при початковому розвитку прикладної теорії гіроскопів. Використовувалися ейлерові кути: прецесії, нутації і чистого обертання. Кінематичне рівняння було вираженням проекцій кутової швидкості тіла на осі, пов'язані з тілом, через похідні ейлерових кутів. Це система шести звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Поява БЦВМ витіснила ейлерові кути. Їх місце зайняла зручніша тривимірна матриця направляючих косинусів.

В процесі розвитку теорії руху твердого тіла біля нерухомої точки для опису руху тіла було запропоновано ряд кінематичних параметрів:

– параметри Родрига-Гамільтона,
– параметри Кейлі-Клейна,
– кути Ейлера-Крилова.

Кути Ейлера-Крилова набули широкого поширення у першу чергу із-за наочної геометричної інтерпретації. На жаль, їх застосування супроводила проблема "виродження" при деяких положеннях твердого тіла.

1.4.1 Кватерніонний метод опису руху КА

В 1843 р. Гамільтон розробив кватерніонний метод. Цей метод грунтується на теоремі Ейлера, яка формулюється приблизно так: будь-який дійсний поворот однієї системи координат відносно іншої можна представити як поворот на деякий кут навколо однієї нерухомої осі. Кватенріон є компактною формою запису орієнтації вказаної осі і кута повороту відповідно до теореми Ейлера. Гідність цього методу: перехід від однієї системи координат до іншої здійснюється за допомогою усього лише чотирьох чисел, а не дев'яти, як у разі матриці направляючих косинусів.

У цьому УМП використовується кінематичне рівняння, записане в кватерніонній формі.

Положення осей ССК відносно ОСК, яка служить опорною, визначається трьома кутами Крилова φ, θ, ψ (крен, тангаж, рискання). При ідеальній орієнтації КА осі ССК співпадають з однойменними осями ОСК.

Згідно рис. 4, перехід від ОСК до ССК визначається послідовністю поворотів на кути φ, θ, ψ. Власні кватерніони цих поворотів мають вигляд [6]

$$\mathbf{Q}_1 = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{i}_2 \cdot \sin\frac{\theta}{2};$$
$$\mathbf{Q}_2 = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2};$$
$$\mathbf{Q}_3 = \cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{i}_3 \cdot \sin\frac{\psi}{2},$$

де $\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \boldsymbol{i_3}$ – орти осей ОСК.

Тоді власний кватерніон $Q=q_0 + \boldsymbol{q_1} \cdot \boldsymbol{i_1} + \boldsymbol{q_2} \cdot \boldsymbol{i_2} + \boldsymbol{q_3} \cdot \boldsymbol{i_3}$ переходу від ОСК до ССК дорівнює

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3 = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{i}_2 \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{i}_3 \cdot \sin\frac{\psi}{2}\right).$$

Звідси можна виразити компоненти кватерніона **Q** через кути θ, φ, ψ.

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2}; \\
q_1 &= \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2}; \\
q_2 &= \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2}; \\
q_3 &= \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\psi}{2}.
\end{aligned} \qquad (1.4.1)$$

Елементи матриці $\overline{\overline{T}}_{bo}$ переходу від ОСК до ССК можна виразити через компоненти кватерніона Q таким чином:

$$\overline{\overline{T}}_{bo} = \begin{vmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\cdot(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & 2\cdot(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) \\ 2\cdot(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2\cdot(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) \\ 2\cdot(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) & 2\cdot(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{vmatrix}. \qquad (1.4.2)$$

При переході від ОСК до ССК компоненти власного кватерніона Q не змінюються, тому можна записати

$$Q=q_0+q_1\cdot\boldsymbol{k_1}+q_2\cdot\boldsymbol{k_2}+q_3\cdot\boldsymbol{k_3}$$

де $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}$ – орти осей ССК.

Кінематичне рівняння руху КА навколо центру мас записується у кватерніонній формі [6]

$$\dot{\mathbf{Q}}=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{Q}\circ\overline{\omega}_{b0}^{b}, \tag{1.4.3}$$

де $\dot{\boldsymbol{Q}}=\dot{q}_0+\dot{q}_1\cdot\boldsymbol{k_1}+\dot{q}_2\cdot\boldsymbol{k_2}+\dot{q}_3\cdot\boldsymbol{k_3}$ – похідна кватерніону Q;

$\overline{\omega}_{b0}^{b}=\left|\omega_{x_b},\omega_{y_b},\omega_{z_b}\right|^{T}$ – вектор кутової швидкості КА відносно ОСК у проекціях на осі ССК, що розуміються як кватерніон $\overline{\omega}_{b0}^{b}=\omega_{x_b}\cdot\boldsymbol{k_1}+\omega_{y_b}\cdot\boldsymbol{k_2}+,\omega_{z_b}\cdot\boldsymbol{k_3}$.

Вектор $\overline{\omega}_{b0}^{b}$ визначається так

$$\overline{\omega}_{bo}^{b}=\overline{\omega}_{bi}^{b}-\overline{\overline{T}}_{bo}\cdot\overline{\omega}_{oi}^{o}.$$

Тут вектор $\overline{\omega}_{oi}^{o}$ знаходиться по формулі (1.2.3).

Рівняння (1.4.3) можна також записати у вигляді системи рівнянь для похідних від компонент кватерніона

$$\begin{aligned}\dot{q}_0&=-0.5\cdot\left(q_1\cdot\omega_{X_b}+q_2\cdot\omega_{Y_b}+q_3\cdot\omega_{Z_b}\right);\\ \dot{q}_1&=0.5\cdot\left(q_0\cdot\omega_{X_b}+q_2\cdot\omega_{Z_b}-q_3\cdot\omega_{Y_b}\right);\\ \dot{q}_2&=0.5\cdot\left(q_0\cdot\omega_{Y_b}-q_1\cdot\omega_{Z_b}+q_3\cdot\omega_{X_b}\right);\\ \dot{q}_3&=0.5\cdot\left(q_0\cdot\omega_{Z_b}+q_1\cdot\omega_{Y_b}-q_2\cdot\omega_{X_b}\right)\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

1.5 Діючі на КА моменти

Сумарний вектор моментів $\overline{M}_{\Sigma}^{b}$ у динамічному рівнянні (1.3.1) є векторною сумою діючих на КА моментів.

По аналогії з КА МС-2-8 будемо враховувати наступні зовнішні обурюючі моменти, що діють на апарат: гравітаційний, магнітний, аеродинамічний і момент сил сонячної радіації. У цьому випадку $\overline{M}_{\Sigma}^{b}$ приймає вигляд

$$\overline{M}_{\Sigma}^{b}=\overline{M}_{g}^{b}+\overline{M}_{m}^{b}+\overline{M}_{a}^{b}+\overline{M}_{s}^{b}+\overline{M}_{C}^{b}+\overline{M}_{R}^{b}, \tag{1.5.1}$$

де $\overline{M}_{g}^{b}$– гравітаційний момент;

$\overline{M}_{m}^{b}$ – магнітний момент;

$\overline{M}_{a}^{b}$ – аеродинамічний момент;

$\overline{M}_{s}^{b}$ – момент сил сонячної радіації;

$\overline{M}_{C}^{b}$ – керуючий момент;

$\overline{M}_{R}^{b}$ – момент розгрузки ДМ.

Гравітаційний момент виникає при відхиленні подовжньої осі КА від напрямку радіуса-вектора, що з’єднує центр мас Землі і центр мас КА.

У режимі орієнтації КА в ОСК гравітаційні моменти в крені і тангажу можуть бути такими, що стабілізують. При орієнтації у режимі програмних поворотів гравітаційні моменти є такими, що обурюють. Величину гравітаційного моменту при відхиленні КА по крену і тангажу можна визначити користуючись наступними виразами:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{гр}} = \frac{3}{2}\omega_{\mathrm{o}}^{2}\left(I_z - I_y\right)sin2\varphi;$$
$$\mathrm{M}_{y}^{\mathrm{гр}} = \frac{3}{2}\omega_{\mathrm{o}}^{2}(I_z - I_x)sin2\vartheta,$$

де ω_{o} – орбітальна кутова швидкість;
I_x, I_y, I_z – головні моменти інерції КА;
φ, ϑ – кути крену і тангажу.

Гравітаційний момент $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}}$ може бути розрахований по формулі

$$\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}} = \frac{3\mu}{\mathrm{r}^3}\cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{b}} \times \overset{=\mathrm{b}}{\mathrm{J}} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{b}},$$

де $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{b}}$ – одиничний вектор, направлений по радиусу-вектору, що з'єднує центр Землі з центром мас КА, у проекціях на осі ССК.

Вектор $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ співпадає з ортом i_3 оси OZ_0, проекції якого на осі ССК складає третій стовбчик матриці $\overset{=}{\mathrm{T}}_{\mathrm{bo}}$, що визначається по формулі (1.4.2).

Магнітний момент – момент від взаємодії КА з магнітним полем Землі (МПЗ) визначається виразенням

$$\mathrm{M}_{\mathrm{м}} = (m + K \cdot B)\mathrm{xB},$$

де $\mathrm{M}_{\mathrm{м}}$ – нескомпенсований магнітний момент КА;
m – вектор магнітного момента КА;
$K=[K_{ij}]$, (i,j=x,y,z) – матриця індукційних коеффіцієнтів;
B – вектор індукції МПЗ у зв'язаній системі координат (ССК).

Вектор аеродинамічного моменту, що діє на КА (M_a), визначається по формулі

$$\mathrm{M}_{\mathrm{a}} = (m_a + C_a\frac{r}{l_{\mathrm{к}}}) \cdot \mathrm{A}_{\mathrm{к}} \cdot l_{\mathrm{к}} \cdot q,$$

де $m_a = \left|m_x \;\; m_y \;\; m_z\right|^T$ – вектор моментних коефіцієнтів;
$\mathrm{C}_a = \left|\mathrm{C}_x \;\; \mathrm{C}_y \;\; \mathrm{C}_z\right|^T$ – вектор силових коефіцієнтів;
$\left|X_{\mathrm{цм}} \;\; Y_{\mathrm{цм}} \;\; Z_{\mathrm{цм}}\right|^T$ – радіус-вектор, що з'єднує початок $O_к$ КСК з центром мас КА;
q – швидкістний натиск, кг/м^2;
$A_к$ – характерна площа, м^2;
$l_{\mathrm{к}}$ – характерна довжина, м;
ρ – щільність атмосфери, кгс^2/м^4;
V – лінійна швидкість КА, м/с.

Значення проекцій коефіцієнтів C_a і m_a на осі КСК розраховуються у функції кута $\beta_a = 0 \ldots 180^o$, що визначає положення вектору швидкості $\overline{V}$відносно подовжньої осі КА, і кута $\varphi_a = 0 \ldots 360^{\mathrm{o}}$, що визначає положення проекції вектора $\overline{V}$ на площу $O_кX_кY_к$ відносно осі $O_кX_к$. Крок по кутам зазвичай такий: $\Delta\beta_{\mathrm{a}} = \Delta\varphi_{\mathrm{a}} = 30^{\mathrm{o}}$. Для проміжних значень кугів β_a і φ_{a} коефіцієнти знаходяться інтерполяцією.

Вектор моменту сил сонячної радіації, що діє на КА (M_S), визначається виразом

$$M_S = (m_S + C_S \frac{r}{l_к}) \cdot A_к \cdot l_к \cdot q_S,$$

де $m_S = \left|m_x \;\; m_y \;\; m_z\right|^T$ – вектор моментних коефіцієнтів;

$C_S = \left|C_x \;\; C_y \;\; C_z\right|^T$ – вектор силових коефіцієнтів ;

$r = \left|X_{цм} \;\; Y_{цм} \;\; Z_{цм}\right|^T$ – радіус-вектор, що з'єднує початок $O_к$ КСК з центром мас КА;

$q = \rho \cdot V^2/2$ – швидкісний натиск, кг/м^2;

$A_к$ – характерна площа, м^2;

$l_к$ – характерна довжина, м;

Значення проекцій коефіцієнтів C_S і m_S на осі КСК розраховуються в функції кута $\beta_S = 0 \dots 180^o$, що визначає положення одиничного вектора $\overline{e}_S$, направленого на Сонце, відносно осі OZ КА, і кута $\varphi_S = 0 \dots 360^o$, що визначає положення проекції вектора $\overline{e}_S$ на площу $O_кX_кY_к$ відносно осі $O_кX_к$. Крок по кутам зазвичай такий: $\Delta\beta_S = \Delta\varphi_S = 30^o$. Для проміжних значень кутів β_S і φ_S коефіцієнти знаходяться інтерполяцією.

1.6 Моделі МПЗ

При розрахунках магнітного моменту, що діє на КА, користовується вектор $\overline{B}$ індукції МПЗ. В описаній математичній моделі ПОУО для визначення вектора $\overline{B}$ можна використовувати дипольну модель МПЗ або гауссову з урахуванням восьми гармонік.

Для діпольної моделі вектор $\overline{B}$ визнається в ОСК співвідношенням

$$\overline{B}^o = \frac{m}{r^3} \cdot \left|h_{12},\; h_{22},\; -2 \cdot h_{32}\right|^T,$$

де h_{12}, h_{22}, h_{32} – елемент матриці $\overline{\overline{T}}_{oe}$ переходу від системи координат $O_EX_eY_eZ_e$ до ОСК;

m=8,1$\cdot 10^{19} \cdot$ Э $\cdot$м^3 – магнітний момент діполя МПЗ.

Відстань від центра Землі до центра мас КА r знаходиться по відповідній формулі з (1.2.1).

Матриця $\overline{\overline{T}}_{oe}$ визначається таким чином:

$$\overline{\overline{T}}_{oe} = \overline{\overline{T}}_{oi} \cdot \overline{\overline{T}}_{ie}; \qquad \overline{\overline{T}}_{ie} = \overline{\overline{T}}_{ei}{}^T;$$

$$\overline{\overline{T}}_{ei} = \overline{\overline{T}}_{\eta} \cdot \overline{\overline{T}}_{\lambda} = \begin{vmatrix} \cos\eta & \sin\eta & 0 \\ -\sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\lambda & 0 & -\sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{vmatrix},$$

де $\overline{\overline{T}}_{ei}$ – матриця переходу від ИСК до системи координат $O_EX_eY_eZ_e$;

$\overline{\overline{T}}_{\eta}$ и $\overline{\overline{T}}_{\lambda}$ – матриця поворотів на кути η і λ відповідно;

$\eta = 11{,}5^o$ – кут нахилу осі діполя МПЗ до осі обертання Землі;

$\lambda = \lambda_G(t_o) + \lambda_m + \omega_E \cdot (t - t_o)$ – кутова відстань лінії перетину площин магнітного і земного екваторів від напряму у точку весняного рівнодення;

$\lambda_G(t_o)$ – кутова відстань Гринвічського меридіану від напряму у точку весняного рівнодення у початковий момент часу;

$\lambda_m = 20^o$ – кутова відстань лінії перетину площин магнітного і земного екваторів від Гринвічського меридіана;

ω_E=0,729·$10^{-4}$$s^{-1}$ – кутова швидкість власного обертання Землі.

Матриця $\overline{\overline{T}}_{oi}$ знаходиться по формулі (1.2.2).

Вектор індукції $\overline{B}$ для гаусової моделі визначається по формулах, приведених у [7] . Для цього необхідно знати поточні географічні координати центру мас КА – доповнення до широти Θ_c і довготи від Гринвічського меридиану λ_g, що розраховуються по формулах

$$\theta_c = \arccos a_{32};$$

$$\lambda_g = \Omega + \lambda_u - \lambda_G(t_0) - \omega_E \cdot t.$$

Тут кут λ_u знаходиться із сфериченого трикутника АОС (рис. 5), причому

$$\sin\lambda_u = \frac{a_{31}}{\sin\theta_c}; \qquad \cos\lambda_u = \frac{a_{33}}{\sin\theta_c};$$

a_{31} a_{32}, a_{33} – елементи матриці T_p, визначаються як

$$\overline{\overline{T}}_p = \overline{\overline{T}}_u \cdot \overline{\overline{T}}_i = \begin{vmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos i & \sin i & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

де – $\overline{\overline{T}}_u$, $\overline{\overline{T}}_i$ матриці повороту на кути u та i відповідноно.

Аргумент широти u визначається по відповідній формулі из (1.2.1).

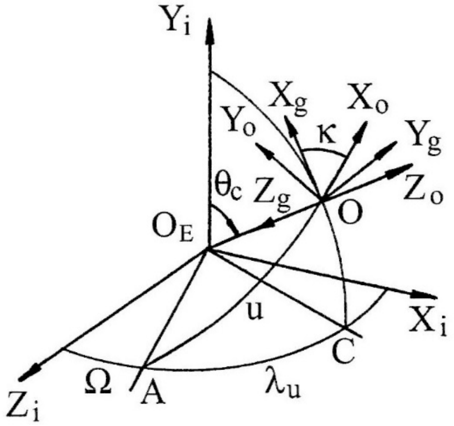

Рис. 5.

Із останнього співвідношення

$$a_{31} = \sin u \cdot \cos i;$$

$$a_{32} = \sin u \cdot \sin i;$$

$$a_{33} = \cos u.$$

Після приведення до розмірності Ерстед вектор індукції, що отримується по формулах з [7], представлений в географічній системі координат

$$\overline{B}^g = \left| B_x, B_y \ , B_z \right|^T$$

Згідно рис. 5, вектор $\overline{\mathrm{B}}$ в ОСК має вигляд

$$\overline{\mathrm{B}}^{\mathrm{o}} = \begin{vmatrix} \mathrm{B}_x \cdot \cos\kappa + \mathrm{B}_y \cdot \sin\kappa \\ \mathrm{B}_x \cdot \sin\kappa - \mathrm{B}_y \cdot \cos\kappa \\ -\mathrm{B}_z \end{vmatrix},$$

де $\sin\kappa = \dfrac{\cos i}{\sin\theta_c}$; $\cos\kappa = \dfrac{\cos u \cdot \sin i}{\sin\theta_c}$.

1.7 Модель верхньої атмосфери

Щільність атмосфери, що використовується при визначенні проекцій вектору аеродинамічного моменту на осі ССК, обчислюється відповідно до Госту 25645.115-84 [8]. Зміна внесена у формулу розрахунку $\cos\varphi_m$, де φ_m – центральний кут між точкою простору, для якої розраховується щільність, і точкою з максимальним значенням щільності в її добовому розподілі.

Значення $\cos\varphi_m$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi_m = \boldsymbol{e}_m^i \cdot \boldsymbol{e}_r^i = e_{mx} \cdot e_{rx} + e_{my} \cdot e_{ry} + e_{mz} \cdot e_{rz},$$

де $\mathbf{e}_m^i = \left|\mathbf{e}_{mx}, \mathbf{e}_{my}, \mathbf{e}_{mz}\right|^T$ – одиничний вектор, направлений у точку максимальної щільності атмосфери;

$\mathbf{e}_r^i = \left|\mathbf{e}_{rx}, \mathbf{e}_{ry}, \mathbf{e}_{rz}\right|^T$ – одиничний вектор, направлений по радиусу-вектору, що з'єднує центр Землі з центром мас КА.

Компоненти вектора e_r^i складають третій рядок матриці $\overline{\overline{\overline{T}}}_{oi}$, що визначається по формулі (1.2.2).

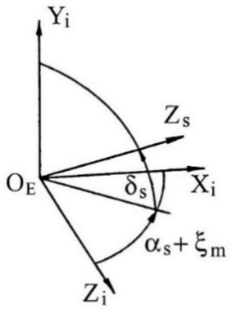

Рис. 6.

Згідно з рис. 6, вектор e_m^i можна визначити як

$$\boldsymbol{e}_m^i = \begin{vmatrix} \cos\delta_s \cdot \sin(\alpha_s + \xi_m) \\ \sin\delta_s \\ \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_s + \xi_m) \end{vmatrix},$$

де α_s, δ_s – пряме сходження і схилення Сонця відповідно;

ξ_m – кут запізнювання максимуму щільності атмосфери по відншенню до максимуму освітленості.

Згідно з рис. 1 і 6, кути δ_s і α_s визначаються своїми тригонометричними функціями, що обчислюються по формулах

$$\sin\delta_s = \sin\varepsilon\cdot\sin\lambda_s; \quad \cos\delta_s = \sqrt{1-\sin^2\delta_s};$$

$$\sin\alpha_s = \frac{\cos\varepsilon\cdot\sin\lambda_s}{\cos\delta_s}; \quad \cos\alpha_s = \frac{\cos\lambda_s}{\cos\delta_s},$$

де $\varepsilon = 23{,}45^o$ – нахил площини екліптики до площини екватора;

$\lambda_s = \lambda_s(t_0) + \omega_s\cdot(t - t_0)$ – екліптична довгота Сонця;

$\lambda_s(t_0)$ – початкове значення екліптичної довготи;

$\omega_s = 0{,}2\cdot 10^6$ c^{-1} – кутова швидкість обертання Землі навколо Сонця.

2 УПРАВЛІННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ КА

Математична модель ПОУО у початковому вигляді включає до свого складу нелінійні диференціальні рівняння. На жаль, методи дослідження систем управління добре розроблені для лінійних систем. Традиційні методи лінеаризації математичної моделі ПОУО пов'язані з втратою точності. При розробці ПОУО КА теми Egyptsat-1 НПП "Хартрон-КОНСАТ" використовувало перетворення нелінійної системи в лінійну без втрати точності [9,10]. У цьому УМП використовуються результати такого перетворення.

2.1 Управління орієнтацією КА у режимах РУПСО і РСО

2.1.1 Управління орієнтацією КА на ділянці гасіння початкової кутової швидкості в РУПСО.

Як виконавчі органи ПОУО на ділянці гасіння початкової кутової швидкості КА в РУПСО використовуються три ЕМ, встановлені уздовж осей ССК. Рухом КА управляє механічний момент, що виникає при взаємодії полів ЕМ з МПЗ

$$\overline{M}_C^b = \overline{L}^b \times \overline{B}^b,$$

де $\overline{L}^b$ – вектор магнітного моменту ЕМ;

$\overline{B}^b$ – вектор індукції МПЗ.

Вектор $\overline{L}^b$ у ССК можна записати у вигляді

$$\overline{L}^b = \left|L_x,\ L_y, L_z\right|^T,$$

де $L_x,\ L_y, L_z$ – значення магнітних моментів у каналах управління.

Проекції вектору необхідного управляючого механічного моменту на осі ССК на ділянці гасіння початкової кутової швидкості КА визначаються як

$$M_x = K_x \cdot \omega_x;$$
$$M_y = K_y \cdot \omega_y;$$
$$M_z = K_z \cdot \omega_z,$$

де M_x, M_y, M_z – проекції вектора управляючого моменту на осі ССК;

K_x, K_y, K_z – коефіцієнти закону управління;

ω_x, ω_y, ω_z – виміряні за допомогою ИУС проекції вектору абсолютної кутової швидкості КА на осі ССК.

Аргументи управління у каналах визначаються таким чином:

$$L_{y_x} = \frac{B_y M_z - B_z M_y}{B^2};$$

$$L_{y_y} = \frac{B_z M_x - B_x M_z}{B^2};$$

$$L_{y_z} = \frac{B_x M_y - B_y M_x}{B^2},$$

де L_{y_x}, L_{y_y}, Ly_z – аргументи управління у каналах крену, тангажу и рискання відповідно;

B_x, B_y, B_z – показання магнітометру;

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2.$$

Коефіцієнт ефективності управління λ_y дорівнює

$$\lambda_y = \begin{cases} \dfrac{1-\delta_y / L_y}{1+h_y} & \text{при } L_y > \delta_y; \\ 0 & \text{при } L_y \le \delta_y, \end{cases}$$

де $L_y = \sqrt{{L_{y_x}}^2 + {L_{y_y}}^2 + {L_{y_z}}^2};$

δ_y – мінімально вожливе значення модуля магнітного моменту ЕМ;

h_y – безрозмірна постійна величина.

Магнітні моменти в каналах управління визначаються наступними виразами:

$$L_j = \begin{cases} -\lambda_y \cdot L_{yj} & \text{при } \left|\lambda_y \cdot L_{yj}\right| < L_{Hj}; \\ -L_{Hj} \cdot \mathrm{sign}(\lambda_y \cdot L_{yj}) & \text{при } \left|\lambda_y \cdot L_{yj}\right| \ge L_{Hj}, \end{cases}$$

де j = x, y, z – індекси каналів управління;

L_j – магнітний момент у j-му каналі;

L_{Hj} – номінальне значення магнітного моменту в j-му каналі.

Умовою закінчення ділянки гасіння початкової кутової швидкості КА і початку процесу приведення КА в орієнтоване на Сонце положення являється зменшення по модулю проекцій абсолютної кутової швидкості обертання КА на осі ССК до порогових значень

$$|\omega_x| \le \omega_{\Pi x}; \qquad |\omega_y| \le \omega_{\Pi y}; \qquad |\omega_z| \le \omega_{\Pi z}.$$

Порогові значення проекцій углової швидкості КА такі:

$$\omega_{\Pi x} = 1°/c; \qquad \omega_{\Pi y} = 1°/c; \qquad \omega_{\Pi z} = 1°/c.$$

2.1.2 Управління орієнтацією КА при побудові і підтримці одновісної орієнтації і стабілізації осі OZ ССК КА на Сонце

Як математичну модель кутового руху КА при синтезі закону управління ДМ, що забезпечує одновісну орієнтацію і стабілізацію КА на Сонці, можна взяти систему диференціальних рівнянь виду

$$\bar{\bar{J}} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times (\bar{\bar{J}} \cdot \bar{\omega} + \bar{H}) = -\dot{\bar{H}};$$

$$\dot{\bar{H}} = -\bar{M}_C,$$

де $\overline{\omega}$ – вектор абсолютної кутової швидкості КА в проекціях на осі ССК;

$\bar{\bar{J}}$ – тензор інерції КА;

$\overline{H}$ – вектор кінетичного моменту ДМ;

$\overline{M}_C$ – вектор управляючого моменту.

Рух орта напряму на Сонці, позначеного через $\bar{s}$, в ССК підкоряється рівнянню

$$\acute{\bar{s}} + \overline{\omega} \times \bar{s} = 0.$$

У розгляд вводиться нерухомий у ССК вектор $\bar{\xi}$, продовж якого повинен орієнтуватися орт $\bar{s}$. Тоді можна сформулювати наступну задачу управління: за інформацією про вектор $\bar{s}$ і кутову швидкість $\overline{\omega}$ знайти закон формування $\overline{M}_C$, що забезпечує асимптотичну стійкість режиму одновісної орієнтації,

$$\bar{\bar{\xi}} = \bar{s}; \quad \bar{\omega}=0.$$

Для вирішення цієї задачі момент, що управляє $\overline{M}_C$, слід вибирати у виді [2]

$$\overline{M}_C = \mu \cdot \bar{\xi} \times \bar{s} + \chi \cdot \bar{s} \times \bar{\bar{K}} \cdot \dot{\bar{s}} - \eta \cdot (\bar{s} \cdot \bar{s}^T) \cdot \bar{\omega},$$

де $\mu > 0;\ \chi > 0;\ \eta > 0$ – коефіцієнти закону управління;

$\bar{\bar{K}} : k_{ij} \geq 0; i, j = 1,2,3$ – матриця управляючих коефіцієнтів;

$(\bar{s} \cdot \bar{s}^T)$ – діадне множення $\bar{s}$ самого на себе, тобто

$$(\bar{s} \cdot \bar{s}^T) = \begin{vmatrix} s_x^2 & s_x \cdot s_y & s_x \cdot s_z \\ s_x \cdot s_y & s_y^2 & s_y \cdot s_z \\ s_x \cdot s_z & s_y \cdot s_z & s_z^2 \end{vmatrix};$$

s_x, s_y, s_z – проекції вектора $\bar{\bar{s}}$ на осі ССК.

2.2 Управління розгрузкою ДМ в РУПСО і РСО

Диференціальне рівняння зміни кінетичного моменту системи "КА+крутні" має вигляд

$$\frac{d}{dt}\overline{K} + \bar{\omega} \times \overline{K} = \overline{M}_B + \overline{M},$$

де $\overline{K}$ – вектор кінетичного моменту системи "КА+маховики”;

$\bar{\omega}$ – вектор абсолютної кутової швидкості КА;

$\overline{M}_B$ – вектор обурюючого моменту, прикладеного до КА;

$\overline{M}$ – вектор управляючего (разгружаючго) моменту.

У інерціальному просторі під постійною дією обурюючих моментів кінетичні моменти маховиків збільшуються пропорційно величині обурюючого моменту і часу його дії. Тому необхідно періодично скидати кінетичний момент, накопичений системою. Це можна зробити за допомогою ЕМ. Для визначення закону управління ЕМ при скиданні кінетичного моменту системи "КА+маховики" можна скористатися основним рівнянням магнітного управління

$$\overline{M}_R = \overline{L} \times \overline{B}, \tag{2.2.1}$$

де $\overline{M}_R$ – вектор управляючого моменту розвантаження, що створює ЕМ;

$\overline{L}$ – вектор магнітного моменту ЕМ;

$\overline{B}$ – вектор індукції МПЗ.

Змінюючи відповідним чином $\overline{L}$ можна забезпечити в тій або іншій мірі бажаний режим скидання кінетичного моменту.

Нехай параметри кінетичного моменту КА характеризуються вектором помилки $\Delta\overline{K}$. Природа цієї помилки у даному випадку пов'язана з накопиченням кінетичних моментів ДМ під постійною дією обурюючих моментів в інерціальному просторі. Система електромагнітного розвантаження повинна створювати управляючий момент, напрям якого протилежний напряму вектора $\Delta\overline{K}$. З урахуванням (2.2.1) можна зажадати виконання рівності

$$\overline{L} \times \overline{B} = -k\ \Delta\overline{K}, \tag{2.2.2}$$

де k – деякий коефіцієнт.

Розвязавши рівняння (2.2.2) відносно $\overline{\mathrm{L}}$, можна получити наступний закон для формування магнітного момента ЕМ при збросі кінетичного моменту ДМ:

$$\overline{\mathrm{L}}=\mathrm{k}\bullet\frac{\Delta\overline{\mathrm{K}}\mathrm{x}\,\overline{\mathrm{B}}}{\mathrm{B}^2}, \qquad (2.3.3)$$

де $\overline{\mathrm{L}} = \left|\mathrm{L_x}, \mathrm{L_y}, \mathrm{L_z}\right|^{\mathrm{T}}$;

$\Delta\overline{\mathrm{K}} = \left|\Delta\mathrm{H_x}, \Delta\mathrm{H_y}, \Delta\mathrm{H_z}\right|^{\mathrm{T}}$;

$\overline{\mathrm{B}} = \left|\mathrm{B_x}, \mathrm{B_y}, \mathrm{B_z}\right|^{\mathrm{T}}$;

$\Delta\mathrm{H_x}, \Delta\mathrm{H_y}, \Delta\mathrm{H_z}$ – підлягаючі скиданню приросту кінетичних моментів ДМ;

$\mathrm{L_x}, \mathrm{L_y}, \mathrm{L_z}$ – значення магнітних моментів у каналах управління;

$\mathrm{B_x}, \mathrm{B_y}, \mathrm{B_z}$ – показники магнітометра;

$\mathrm{B}^2 = \mathrm{B_x}^2 + \mathrm{B_y}^2 + \mathrm{B_z}^2$.

Після підстановки (2.2.3) у (2.2.1) получається остаточне вираження для $\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{R}$

$$\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{B}^2}\cdot\left[\Delta\overline{\mathrm{K}}\cdot\mathrm{B}^2 - \overline{\mathrm{B}}\cdot(\Delta\overline{\mathrm{K}}\cdot\overline{\mathrm{B}})\right] = -\mathrm{k}\left(\Delta\overline{\mathrm{K}} - \frac{\Delta\overline{\mathrm{K}}\cdot\overline{\mathrm{B}}}{\mathrm{B}^2}\cdot\overline{\mathrm{B}}\right).$$

Коефіцієнт закону управління розвантаженням к = 0,05 с $^{-1}$.

2.3 Управління орієнтацією КА в РПП

Управління орієнтацією КА в РПП здійснюються з використанням ДМ як виконавчих органів ПОУО. У РПП розвантаження ДМ не проводиться.

Алгоритм формування управляючих сигналів на ДМ при роботі ПОУО у РПП складається з двох частин:

- алгоритму розрахунку програмної траєкторії повороту КА;
- алгоритму розрахунку управління для відстежування програмної траєкторії повороту КА.

2.3.1. Алгоритм розрахунку програмної траєкторії повороту КА

Вхідні дані:

$\mathrm{t_0}$ – початковий момент часу (момент початку повороту КА);

$\mathrm{t_1}$ – кінцевий момент часу (момент закінчення повороту КА);

$\Lambda(\mathrm{t_0})$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0(\mathrm{t_0})$ і векторною частиною $\overline{\lambda}(\mathrm{t_0})$, що визначає орієнтацію КА в ОСК у момент часу $\mathrm{t_0}$;

$\overline{\omega}(\mathrm{t_0})$ – заданий проекціями на осі ССК вектор абсолютної кутової швидкості КА у момент часу $\mathrm{t_0}$;

$\Lambda(\mathrm{t_1})$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0(\mathrm{t_1})$ і векторною частиною $\overline{\lambda}(\mathrm{t_1})$, що визначає необхідну в момент часу $\mathrm{t_1}$ орієнтацію КА в ОСК;

$\overline{\omega}(\mathrm{t_1})$ – заданий проекціями на осі ССК необхідний вектор абсолютної кутової швидкості КА у момент часу $\mathrm{t_1}$;

$\overline{\omega}_0$ – вектор орбітальної кутової швидкості.

Вихідні дані:

$\Lambda^*(t)$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0^*(t)$ і векторною частиною $\overline{\lambda}^*(t)$, що визначає кінематичну траєкторію повороту КА в ОСК на інтервалі часу $t_0 \leq t \leq t_1$;

$\dot{\Lambda}^*(t)$ – похідна від кватерніона $\Lambda^*(t)$;

$U^*(t)$ – програмне управління.

Алгоритм розрахунку програмного управління:

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\overline{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{\Lambda} \circ \overline{\omega} - \overline{\omega}_O \circ \mathbf{\Lambda});$$

$$\mathbf{x}_1 = (\lambda_0,\ \overline{\lambda})^T;$$

$$\mathbf{x}_2 = (\dot{\lambda}_0,\ \dot{\overline{\lambda}})^T;$$

$$\tau = t_1 - t_0;$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1(t_1) - \mathbf{x}_1(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0) \cdot \tau;$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2(t_1) - \mathbf{x}_2(t_0);$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{6}{\tau^2} \cdot \mathbf{y}_2 - \frac{12}{\tau^3} \cdot \mathbf{y}_1;$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1 \frac{\tau}{2} - \frac{\mathbf{y}_2}{\tau};$$

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_1(t_0) + \mathbf{x}_2(t_0) \cdot (t - t_0) + \mathbf{C}_1 \cdot \frac{(t - t_0)^3}{6} - \mathbf{C}_2 \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2};$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_2(t_0) + \mathbf{C}_1 \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} - \mathbf{C}_2 \cdot (t - t_0);$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}_1 \cdot (t - t_0) - \mathbf{C}_2;$$

$$n = \|\mathbf{x}_1\|;$$

$$\dot{n} = \frac{\mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{x}_2}{n};$$

$$\ddot{n} = \frac{\|\mathbf{x}_2\|^2}{n} + \frac{\mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{U}}{n} - \frac{\dot{n}^2}{n};$$

$$\mathbf{\Lambda}^* = \frac{\mathbf{x}_1}{n};$$

$$\mathbf{\Lambda}^* = \frac{\mathbf{x}_2}{n} - \frac{\dot{n}}{n^2} \cdot \mathbf{x}_1;$$

$$\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{U}}{n} - 2\frac{\dot{n}}{n^2} \cdot \mathbf{x}_2 + \left(2 \cdot \frac{\dot{n}}{n^3} - \frac{\ddot{n}}{n^2}\right) \cdot \mathbf{x}_1.$$

2.3.2.Алгоритм розрахунку управління для відстеження програмної траєкторії повороту КА

Вхідні дані:

$\Lambda(t)$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0(t)$ і векторною частиною $\overline{\lambda}(t)$, що визначає поточну орієнтацію КА в ОСК;

$\overline{\omega}(t)$ – заданий виміряними за допомогою ИУС проекціями на осі ССК вектор абсолютної кутової швидкості КА у нинішній момент часу;

$\Lambda^*(t)$ – кватерніон із скалярною частиною λ_0^* (t) і векторною частиною $\overline{\lambda}^*$ (t), що визначає кінематичну траєкторію повороту КА в ОСК на інтервалі часу $t_0 \leq t \leq t_1$;

$\dot{\Lambda}^*(t)$ – похідна від кватерніону $\Lambda^*(t)$;

$U^*(t)$ – програмне управління;

$\overline{\overline{J}}$ – тензор інерції КА;

$\overline{H}$ – вектор кінетичного моменту ДМ;

$\overline{\omega_O}$ – вектор орбітальної кутової швидкості.

Вихідні дані:

$\overline{M_C}$ – задані у формі вектору управляючі сигнали на ДМ (діючий на КА вектор управляючого моменту).

Алгоритм розрахунку управління:

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\overline{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{\Lambda} \circ \overline{\omega} - \overline{\omega}_O \circ \mathbf{\Lambda});$$

$$\mathbf{e}_1 = (\lambda_0 - \lambda_0^*,\ \overline{\lambda} - \overline{\lambda}^*)^T;$$

$$\mathbf{e}_2 = (\dot{\lambda}_0 - \dot{\lambda}_0^*,\ \dot{\overline{\lambda}} - \dot{\overline{\lambda}}^*)^T;$$

$$\Delta\mathbf{U} = -\overline{\overline{K}}_{\Pi 1} \cdot \mathbf{e}_1 - \overline{\overline{K}}_{\Pi 2} \cdot \mathbf{e}_2 - \overline{\overline{K}}_{\Pi 3} \cdot \int_{t_0}^{t} \mathbf{e}_1 \cdot dt;$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \overline{u} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^* + \Delta\mathbf{U};$$

$$\overline{e}_n = \begin{vmatrix} 2 \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_0 \cdot \lambda_3) \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ 2 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3 - \lambda_0 \cdot \lambda_1) \end{vmatrix};$$

$$\overline{M}_C = 2 \cdot \overline{\overline{J}} \cdot (\lambda_0 \cdot \overline{u} - u_0 \cdot \overline{\lambda} - \overline{\lambda} \times \overline{u}) - \overline{\omega}_O \cdot \overline{\overline{J}} \cdot (\overline{\omega} \times \overline{e}_n) + \overline{\omega} \times (\overline{\overline{J}} \cdot \overline{\omega} + \overline{H}).$$

Тут $\overline{\overline{K}}_{\Pi 1}, \overline{\overline{K}}_{\Pi 2}, \overline{\overline{K}}_{\Pi 3}$ – діагональні матриці, складені з коефіцієнтів закону управління орієнтацією КА у РПП.

2.4 Управління орієнтацією КА в РОСК

Управління орієнтацією КА в РОСК здійснюються з використанням ДМ як виконавчих органів ПОУО. На відміну від РПП у РОСК на фоні управління роботою ПОУО проводиться розвантаження ДМ.

Алгоритм формування сигналів, що управляють, на ДМ при роботі ПОУО в РОСК складається з двох частин:

- алгоритму розрахунку програмної траєкторії КА;
- алгоритму розрахунку управління для відстеження програмної траєкторії КА.

2.4.1 Алгоритм розрахунку програмної траєкторії КА

Вхідні дані:

t_0 – початковий момент часу (момент початку РОСК);

t_1 – кінцевий момент часу (момент закінчення РОСК);

$\Lambda(t_0)$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0(\mathbf{t_0})$ і векторною частиною $\bar{\lambda}(t_0)$, що визначає орієнтацію КА в ОСК у момент часу t_0;

$\bar{\omega}(t_0)$ – заданий проекціями на осі ССК вектор абсолютної кутової швидкості КА у момент часу t_0;

$\Lambda(t_1)$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0(\mathbf{t_1})$ векторною частиною $\bar{\lambda}(t_{01})$, що визначає орієнтацію КА в ОСК у момент часу t_1;

$\bar{\omega}(t_1)$ – заданий проекціями на осі ССК необхідний вектор абсолютної кутової швидкості КА у момент часу t_1;

$\bar{\omega}_0$ – вектор орбітальної кутової швидкості.

Вихідні дані:

$\Lambda^*(t)$ – кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0^*(t)$ і векторною частиною $\bar{\lambda}^*(t)$, що визначає кінематичну траєкторію КА в ОСК на інтервалі часу $t_0 \le t \le t_1$;

$\dot{\Lambda}^*(t)$ – похідна від кватерніона $\Lambda^*(t)$;

$U^*(t)$ – програмне управління.

Алгоритм розрахунку програмного управління:

$$\dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\bar{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\Lambda \circ \bar{\omega} - \bar{\omega}_0 \circ \Lambda);$$

$$\mathbf{x}_1 = \left(\lambda_0, \bar{\lambda}\right)^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(\dot{\lambda}_0, \dot{\bar{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}};$$

$$\tau = t_1 - t_0;$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1(t_1) - \mathbf{x}_1(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0) \cdot \tau;$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2(t_1) - \mathbf{x}_2(t_0);$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{6}{\tau^2} \cdot \mathbf{y}_2 - \frac{12}{\tau^3} \cdot \mathbf{y}_1;$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1 \frac{\tau}{2} - \frac{\mathbf{y}_2}{\tau};$$

$$\mathbf{x}_1(\mathrm{t}) = \mathbf{x}_1(\mathrm{t}_0) + \mathbf{x}_2(\mathrm{t}_0) \cdot (\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) + \mathbf{C}_1 \cdot \frac{(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)^3}{6} - \mathbf{C}_2 \cdot \frac{(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)^2}{2};$$
$$\mathbf{x}_2(\mathrm{t}) = \mathbf{x}_2(\mathrm{t}_0) + \mathbf{C}_1 \cdot \frac{(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)^2}{2} - \mathbf{C}_2 \cdot (\mathrm{t} - \mathrm{t}_0);$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{C}_1 \cdot (\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) - \mathbf{C}_2;$$
$$\mathrm{n} = \|\mathbf{x}_1\|;$$
$$\dot{\mathrm{n}} = \frac{\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathrm{n}};$$
$$\ddot{\mathrm{n}} = \frac{\|\mathbf{x}_2\|^2}{\mathrm{n}} + \frac{\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}}{n} - \frac{\dot{\mathrm{n}}^2}{\mathrm{n}};$$
$$\mathbf{\Lambda}^* = \frac{\mathbf{x}_1}{\mathrm{n}};$$
$$\dot{\mathbf{\Lambda}}^* = \frac{\mathbf{x}_2}{\mathrm{n}} - \frac{\dot{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^2} \cdot \mathbf{x}_1;$$
$$\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{U}}{\mathrm{n}} - 2\frac{\dot{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^2} \cdot \mathbf{x}_2 + \left(2 \cdot \frac{\dot{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^3} - \frac{\ddot{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^2}\right) \cdot \mathbf{x}_1.$$

2.4.2 Алгоритм розрахунку управління для відстеження програмної траєкторії КА

Вхідні дані:

$\Lambda(\mathrm{t})$	–	кватерніон із скалярною частиною $\lambda_0(\mathrm{t})$ і векторною частиною $\overline{\lambda}(\mathrm{t})$, що визначає поточну орієнтацію КА в ОСК;
$\overline{\omega}(\mathrm{t})$	–	заданий виміряними за допомогою ИУС проекціями на осі ССК вектор абсолютної кутової швидкості КА у даний момент часу;
$\Lambda^*(\mathrm{t})$	–	кватерніон із скалярною частиною λ_0^* (t) і векторною частиною $\overline{\lambda}^*(\mathrm{t})$, що визначає кінематичну траєкторію повороту КА в ОСК на інтервалі часу $t_0 \leq t \leq t_1$;
$\dot{\Lambda}^*(\mathrm{t})$	–	похідна від кватерніону Λ*(t);
$\mathrm{U}^*(\mathrm{t})$	–	програмне управління;
$\overline{\overline{\mathrm{J}}}$	–	тензор інерції КА;
$\overline{\mathrm{H}}$	–	вектор кінетичного моменту ДМ;
$\overline{\omega_O}$	–	вектор орбітальної кутової швидкості.

Вихідні дані:

$\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}$ – задані у формі вектору управляючі сигнали на ДМ (діючий на КА вектор моменту, що управляє).

Алгоритм розрахунку управління:

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\overline{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{\Lambda} \circ \overline{\omega} - \overline{\omega}_O \circ \mathbf{\Lambda});$$
$$\mathbf{e}_1 = (\lambda_0 - \lambda_0^*,\ \overline{\lambda} - \overline{\lambda}^*)^{\mathrm{T}};$$
$$\mathbf{e}_2 = (\dot{\lambda}_0 - \dot{\lambda}_0^*,\ \dot{\overline{\lambda}} - \dot{\overline{\lambda}}^*)^{\mathrm{T}};$$
$$\Delta\mathbf{U} = -\overline{\overline{\mathrm{K}}}_{\Pi 1} \cdot \mathrm{e}_1 - \overline{\overline{\mathrm{K}}}_{\Pi 2} \cdot \mathrm{e}_2 - \overline{\overline{\mathrm{K}}}_{\Pi 2} \cdot \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{e}_1 \cdot \mathrm{dt};=$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^* + \Delta\mathbf{U};$$

$$\bar{e}_n = \begin{vmatrix} 2\cdot(\lambda_1\cdot\lambda_2 + \lambda_0\cdot\lambda_3) \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ 2\cdot(\lambda_2\cdot\lambda_3 - \lambda_0\cdot\lambda_1) \end{vmatrix};$$

$$\overline{M}_C = 2\cdot\bar{\bar{J}}\cdot(\lambda_0\cdot\bar{u} - u_0\cdot\bar{\lambda} - \bar{\lambda}\times\bar{u}) - \bar{\omega}_O\cdot\bar{\bar{J}}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{e}_n) + \bar{\omega}\times(\bar{\bar{J}}\cdot\bar{\omega} + \overline{H}).$$

Тут $\bar{\bar{K}}_{П1}, \bar{\bar{K}}_{П2}, \bar{\bar{K}}_{П3}$ – діагональні матриці, складені з коефіцієнтів закону управління орієнтацією КА в РОСК.

2.5 Управління розгрузкою ДМ в РОСК

Розвантаження ДМ у РОСК забезпечується створенням електромагнітами ПОУО зовнішнього моменту, протилежному по напряму вектору приростів кінетичних моментів ДМ на фоні виконання алгоритмів РОСК.

Закон управління магнітних систем має вигляд

$$\bar{L} = \bar{\bar{K}}\cdot\frac{\bar{\Delta}\times\bar{B}}{B^2},$$

де $\bar{\bar{K}}$ – матриця управляючих коефіцієнтів;

$\bar{\Delta} = (\Delta H_x, \Delta H_y, \Delta H_z)^T$ – вектор приростів кінетичних моментів ДМ;

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2.$$

На підставі цього можна отримати закон управління ЕМ при розвантаженні ДМ в координатній формі

$$L_{y_x} = \frac{k_z\cdot\Delta H_z\cdot B_y - k_y\cdot\Delta H_y\cdot B_z}{B^2};$$

$$L_{y_y} = \frac{k_x\cdot\Delta H_x\cdot B_z - k_z\cdot\Delta H_z\cdot B_x}{B^2};$$

$$L_{y_z} = \frac{k_y\cdot\Delta H_y\cdot B_x - k_x\cdot\Delta H_x\cdot B_y}{B^2},$$

де $L_{y_x}, L_{y_y}, L_{y_z}$ – аргументи управленя ЕМ каналів крену, тангажа і рискання відповідно;

$k_x, k_y, k_z,$ – коефіцієнти закону управління ЕМ;

$B_x, B_y, B_z,$ – показнники магнітометру.

Коефіцієнт ефективності управління λ_y дорівнює

$$\lambda_y = \begin{cases} \dfrac{1-\delta_y / L_y}{1+h_y} & \text{при } L_y > \delta_y; \\ 0 & \text{при } L_y \le \delta_y, \end{cases}$$

де $L_y = \sqrt{L_{y_x}^2 + L_y^2 + L_{y_z}^2}$;

δ_y – мінімальне можливе значення модуля магнітного моменту ЕМ;

h_y – безрозмірна постійна величина.

Магнітні моменти в каналах управління визначаються наступними виразами:

$$L_j = \begin{cases} -\lambda_y \cdot L_{yj} & \text{при } |\lambda_y \cdot L_{yj}| < L_{Hj}; \\ -L_{Hj} \cdot \operatorname{sign}(\lambda_y \cdot L_{yj}) & \text{при } |\lambda_y \cdot L_{yj}| \geq L_{Hj}, \end{cases}$$

де j=x, y, z – індекси каналів управління;

L_j – магнітний момент в j-му каналі;

L_{H_j} – номінальне значення магнітного моменту в j-му каналі.

3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИСТРОЇВ ПОУО

У роботі ПОУО використовуються такі пристрої: магнітометр, ЕМ, ИУС, сонячний датчик, ДМ і зоряний датчик. У цьому розділі приводяться описи математичних моделей вказаних приладів.

3.1 Математична модель магнітометра

Магнітометр призначений для виміру проекцій вектору індукції МПЗ на координатні осі приладу. Конструктивно він складається з блоку електроніки і блоку ферозондів, що містить три ідентичні обмотки, в яких при русі КА по орбіті наводяться електрорушійні сили, пропорційні проекціям вектору магнітної індукції МПЗ на осі чутливості приладу

Для матриці $\bar{\bar{C}}_{PE}$, що задає ориентацію базиса Р, пов'язаного з посадочною площиною магнітометра, в базисі Е ССК, можна записати вираження

$$\bar{\bar{C}}_{PE} = \bar{\bar{C}}_{PP'} \cdot \bar{\bar{C}}_{P'E}, \tag{3.1.1}$$

де $\bar{\bar{C}}_{P'E}$ – розрахункова матриця, що визначає установку приладу в базисі Е;

$\bar{\bar{C}}_{PP'}$ – матриця, що визначає похибки установки.

Тут і надалі для визначення направляючих косинусів використовуються кути Брайнта φ_1, φ_2, φ_3. Послідовність поворотів на ці кути показана на рис. 7. Тоді матриця установки прибору $\bar{\bar{C}}_{P'E}$ з використанням скорочених позначень матиме вигляд

$$\bar{\bar{C}}_{P'E} = \begin{vmatrix} c\varphi_2 c\varphi_3 & c\varphi_1 c\varphi_3 + s\varphi_1 s\varphi_2 c\varphi_3 & s\varphi_1 s\varphi_3 - c\varphi_1 c\varphi_2 c\varphi_3 \\ -c\varphi_2 s\varphi_3 & c\varphi_1 c\varphi_3 - s\varphi_1 s\varphi_2 s\varphi_3 & s\varphi_1 c\varphi_3 + c\varphi_1 s\varphi_2 s\varphi_3 \\ s\varphi_2 & -s\varphi_1 c\varphi_2 & c\varphi_1 c\varphi_2 \end{vmatrix},$$

де $c\varphi_k = \cos\varphi_k$; $s\varphi_k = \sin\varphi_k$; $k = 1,2,3$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – кути установки прибора.

Матриця похибок установки приладу $\bar{\bar{C}}_{PP'}$ при достатньо малих кутах похибок установки $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ буде мати вигляд

$$\bar{\bar{C}}_{PP'} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 1 \end{vmatrix},$$

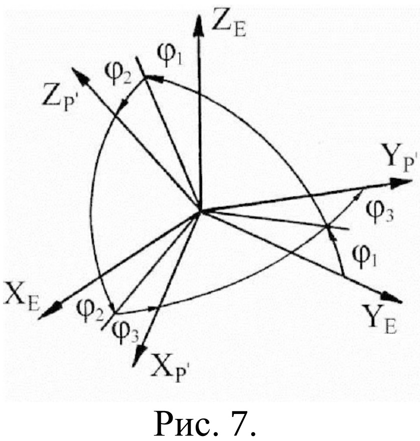

Рис. 7.

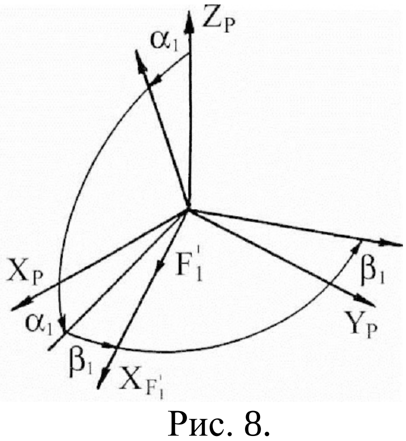

Рис. 8.

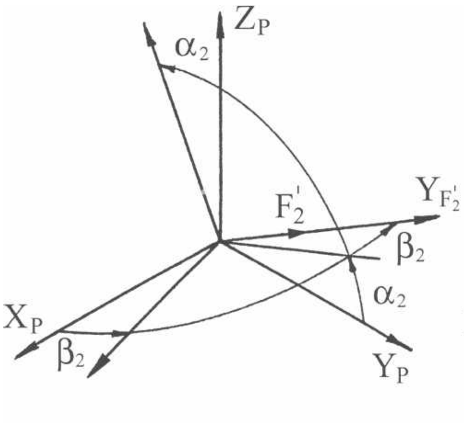

Рис. 9.

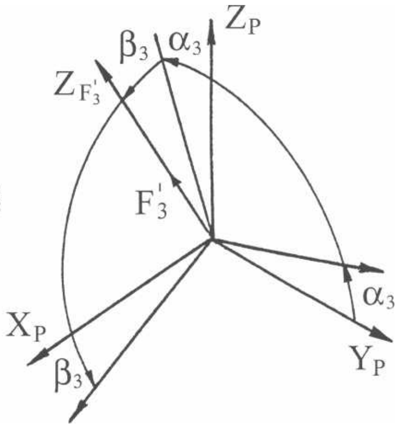

Рис. 10.

Нехай орієнтація вимірювальних осей ферозондів F1, F2, F3 у базисі Р задана відповідними матрицями $\overline{\overline{C}}_{F_iP}$, де і = 1, 2, 3. Тоді для матриці $\overline{\overline{C}}_{F_iP}$ можна записати співвідношення

$$\overline{\overline{C}}_{F_iP} = \overline{\overline{C}}_{F_iF_i'} \cdot \overline{\overline{C}}_{F_i'P}, \qquad (3.1.2)$$

де $\overline{\overline{C}}_{F_i'P}$ – розрахункова матриця, що визначає орієнтацію Fi у базисі Р;

$\overline{\overline{C}}_{F_iF_i'}$ – матриця, що визначає похибки орієнтації Fi у базисі Р.

Нехай розрахункова орієнтація кожної вимірювальної осі Fi у базисі Р задана кутами α_i, β_i, і= 1, 2, 3 (рис. 8... 10). Тогді матриці направляючих косинусів $\overline{\overline{C}}_{F_i'P}$ будуть мати вигляд

$$\overline{\overline{C}}_{F_1'P} = \begin{vmatrix} c\alpha_1 c\beta_1 & s\beta_1 & -s\alpha_1 c\beta_1 \\ -c\alpha_1 s\beta_1 & c\beta_1 & s\alpha_1 s\beta_1 \\ s\alpha_1 & 0 & c\alpha_1 \end{vmatrix};$$

$$\overline{\overline{C}}_{F_2'P} = \begin{vmatrix} c\beta_2 & c\alpha_2 s\beta_2 & s\alpha_2 s\beta_2 \\ -s\beta_2 & c\alpha_2 c\beta_2 & s\alpha_2 c\beta_2 \\ 0 & -s\alpha_2 & c\alpha_2 \end{vmatrix};$$

$$\overline{\overline{C}}_{F_3'P} = \begin{vmatrix} c\beta_3 & s\alpha_3 s\beta_3 & -c\alpha_3 s\beta_3 \\ 0 & c\alpha_3 & s\alpha_3 \\ s\beta_3 & -s\alpha_3 c\beta_3 & c\alpha_3 c\beta_3 \end{vmatrix}.$$

При досить малих кутах похибок орієнтації осей Fi у базисі Р матриці $\overline{\overline{C}}_{F_iP}$ будуть мати вигляд

$$\overline{\overline{C}}_{F_1F_1'} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta\beta_1 & -\Delta\alpha_1 \\ -\Delta\beta_1 & 1 & 0 \\ \Delta\alpha_1 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\overline{\overline{C}}_{F_2F_2'} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta\beta_2 & 0 \\ -\Delta\beta_2 & 1 & \Delta\alpha_2 \\ 0 & -\Delta\alpha_2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\bar{\bar{C}}_{F_3F_3'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\Delta\beta_3 \\ 0 & 1 & \Delta\alpha_3 \\ \Delta\beta_3 & -\Delta\alpha_3 & 1 \end{vmatrix},$$

де $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i$, – похибки кутової орієнтації вимірювальних осей.

З урахуванням виразів (3.1.1) і (3.1.2) матриці направляючих косинусів $\bar{\bar{C}}_{F_iE}$, що задають орієнтацію базисів F_i (i = 1, 2, 3) у базисі E, мають вигляд

$$\bar{\bar{C}}_{F_iE} = \bar{\bar{C}}_{F_iF_i'} \cdot \bar{\bar{C}}_{F_i'P} \cdot \bar{\bar{C}}_{PP'} \cdot \bar{\bar{C}}_{P'E}.$$

Позначивши рядки цих матриць через c_{1j}, c_{2j}, c_{3j}, j= 1,2,3, можна сформувати матрицю $\bar{\bar{C}}_{FE}$, що складається з першого рядка матриці $\bar{\bar{C}}_{F_1E}$, другого рядка матриці $\bar{\bar{C}}_{F_2E}$ і третього рядка матриці $\bar{\bar{C}}_{F_3E}$, т.е.

$$\bar{\bar{C}}_{FE} = \begin{vmatrix} \bar{c}_{11} \\ \bar{c}_{22} \\ \bar{c}_{33} \end{vmatrix}.$$

При прийнятих позначеннях для вектора $\bar{B}_F$, компонентами якого є проекції вектора $\bar{B}$ індукції МПЗ на вимірювальні осі ферозондів F_1, F_2, F_3, справедливе співвідношення

$$\bar{B}_F = \begin{vmatrix} \bar{c}_{11} \cdot \bar{B}_E \\ \bar{c}_{22} \cdot \bar{B}_E \\ \bar{c}_{33} \cdot \bar{B}_E \end{vmatrix},$$

де $\bar{B}_E$ – вектор індукції МПЗ у проекціях на осі базису E.

Останнє співвідношення можна переписати так

$$\bar{B}_F = \bar{\bar{C}}_{FE} \cdot \bar{B}_E.$$

Вектор $\bar{B}_{Fизм}$, компонентами якого є виміряні магнітометром проекції вектора $\bar{B}$ індукції МПЗ, можна записати у вигляді

$$\bar{B}_{Fизм} = \bar{B}_F + \Delta\bar{B}_{Fизм},$$

де $\Delta\bar{B}_{Fизм}$ – вектор похибок вимірів магнітометра.

Вектор $\Delta\bar{B}_{Fизм}$ можна представити у вигляді

$$\Delta\bar{B}_{Fизм} = \Delta\bar{B}_F + \delta\bar{B}_F,$$

де $\Delta\bar{B}_F$ – вектор сумарної основної похибки вимірювань,

$\delta\bar{B}_F$ – вектор додаткової похибки вимірів.

Для векторів $\Delta\bar{B}_F$ і $\delta\bar{B}_F$ можна записати

$$\Delta\bar{B}_F = \bar{\bar{K}}_s \cdot \bar{B}_F + \Delta\bar{B}_s;$$

$$\delta\bar{B}_F = \bar{\bar{k}}_r \cdot \bar{B}_F + \delta\bar{B}_r,$$

де $\bar{\bar{K}}_s$, $\bar{\bar{k}}_r$ – матриці систематичних і випадкових складових, що становлять крутизну вихідної характеристики магнітометра;

$\Delta\bar{B}_s, \delta\bar{B}_r$ – вектори систематичних і випадкових помилок вимірів.

Тоді вираз для вектора $\bar{B}_{Fизм}$ приймає остаточного вигляду

$$\overline{B}_{Fизм} = \overline{B}_F + (\overline{\overline{K}}_s + \overline{\overline{k}}_r) \cdot \overline{B}_F + \Delta\overline{B}_s + \delta\overline{B}_r.$$

3.2 Математична модель ЕМ

ЕМ призначені для формування управляючого моменту $\overline{M}_C$ (або моменту розгрузки ДМ $\overline{M}_R$), що виникає при взаємодії магнітного поля ЕМ з МПЗ і визначеного співвідношенням $\overline{M}_C = \overline{L} \times \overline{B}$,

де $\overline{L}$ – вектор магнітного моменту ЕМ;

$\overline{B}$ – вектор індукції МПЗ.

ЕМ встановлюють так, щоб напрями їх магнітних моментів співпадали з осями деякого базису S, що задає установку ЕМ в ССК. Проте із-за конструктивних і технологічних дефектів реальна орієнтація магнітних моментів ЕМ не співпадає з базисом S.

Використовуючи для визначення направляючих косинусів кути Брайнта ψ_1, ψ_2, ψ_3, матрицю $\overline{\overline{C}}_{SE}$ орієнтації базису S у базисі E ССК можна записати у вигляді

$$\overline{\overline{C}}_{SE} = \begin{vmatrix} c\psi_2 c\psi_3 & c\psi_1 s\psi_3 + s\psi_1 s\psi_2 c\psi_3 & s\psi_1 s\psi_3 - c\psi_1 s\psi_2 c\psi_3 \\ -c\psi_2 s\psi_3 & c\psi_1 c\psi_3 - s\psi_1 s\psi_2 s\psi_3 & s\psi_1 c\psi_3 + c\psi_1 s\psi_2 s\psi_3 \\ s\psi_2 & -s\psi_1 c\psi_2 & c\psi_1 c\psi_2 \end{vmatrix},$$

де $c\psi_i = \cos\psi_i$; $s\psi_i = \sin\psi_i$; $i = 1, 2, 3$;

$\psi_{1,}, \psi_{2,}, \psi_{3,}$ – кути орієнтації базису S у базисі E.

Тоді перехід від базису S до базису E визначається таким чинзом:

$$\overline{\overline{C}}_{ES} = \overline{\overline{C}}_{SE}^{\,T}.$$

Нехай орієнтація магнітних моментів ЕМ у базисі S задана кутами δ_j, η_j,, j = x, y, z. Використовуючи методологію з розділу 3.1 (див. рис. 8.. 10), матриці $\overline{\overline{C}}_{L_xS}$, $\overline{\overline{C}}_{L_yS}$, $\overline{\overline{C}}_{L_zS}$ направляючих косинусів, що задають орієнтацію магнітних моментів ЕМ у базисі S, можна записати у вигляді

$$\overline{\overline{C}}_{L_xS} = \begin{vmatrix} c\delta_x c\eta_x & s\eta_x & -s\delta_x c\eta_x \\ -c\delta_x s\eta_x & c\eta_x & s\delta_x s\eta_x \\ s\delta_x & 0 & c\delta_x \end{vmatrix};$$

$$\overline{\overline{C}}_{L_yS} = \begin{vmatrix} c\eta_y & c\delta_y s\eta_y & s\delta_y s\eta_y \\ -s\eta_y & c\delta_y c\eta_y & s\delta_y c\eta_y \\ 0 & -s\delta_y & c\delta_y \end{vmatrix};$$

$$\overline{\overline{C}}_{L_zS} = \begin{vmatrix} c\eta_z & s\delta_z s\eta_z & -c\delta_z s\eta_z \\ 0 & c\delta_z & s\delta_z \\ s\eta_z & -s\delta_z c\eta_z & c\delta_z c\eta_z \end{vmatrix}.$$

Матриці переходу від систем координат, пов'язаних з магнітними моментами ЕМ, до базису S, визначаються так

$$\bar{\bar{C}}_{SL_x} = \bar{\bar{C}}_{L_xS}^{\ \ T};$$
$$\bar{\bar{C}}_{SL_y} = \bar{\bar{C}}_{L_yS}^{\ \ T};$$
$$\bar{\bar{C}}_{SL_z} = \bar{\bar{C}}_{L_zS}^{\ \ T}.$$

Для матриць переходу від систем координат, пов'язаних з магнітними моментами ЕМ, до базису E, можна записати

$$\bar{\bar{C}}_{EL_x} = \bar{\bar{C}}_{ES} \cdot \bar{\bar{C}}_{SL_x};$$
$$\bar{\bar{C}}_{EL_y} = \bar{\bar{C}}_{ES} \cdot \bar{\bar{C}}_{SL_y};$$
$$\bar{\bar{C}}_{EL_z} = \bar{\bar{C}}_{ES} \cdot \bar{\bar{C}}_{SL_z}$$

Позначивши елементи матриць $\bar{\bar{C}}_{EL_x}$, $\bar{\bar{C}}_{EL_y}$, $\bar{\bar{C}}_{EL_z}$ через c_{kl}^{x}, c_{kl}^{y}, c_{kl}^{z} (k=1…3, l=1…3), можна сформувати матрицю $\bar{\bar{C}}_{EL}$, що складається з першого стовбця матриці $\bar{\bar{C}}_{EL_x}$, другого стовбця матриці $\bar{\bar{C}}_{EL_y}$ і третього стовбця матриці $\bar{\bar{C}}_{EL_z}$, тобто

$$\bar{\bar{C}}_{FE} = \begin{vmatrix} c_{11}^{x} & c_{12}^{y} & c_{13}^{z} \\ c_{21}^{x} & c_{22}^{y} & c_{23}^{z} \\ c_{31}^{x} & c_{32}^{y} & c_{33}^{z} \end{vmatrix}.$$

Тоді вектор $\bar{L}$ магнітного моменту ЕМ у базисі E можна представити у вигляді

$$\bar{L}_E = \bar{\bar{C}}_{EL} \cdot \begin{vmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{vmatrix}, \tag{3.2.1}$$

де L_x, L_y, L_z – магнітні моменти ЕМ.

Магнитні моменти ЕМ визначаються таким чином:

$$L_j = K_j \cdot I_j,$$

де j=x, y, z;

I_j – струм, що протікає в обмотках j-го ЕМ;

K_j – крутизна вихідної характеристики j-го ЕМ.

З урахуванням цього вираження (3.2.1) набирає вигляду

$$\bar{L}_E = \bar{\bar{C}}_{EL} \cdot \begin{vmatrix} K_x \cdot I_x \\ K_y \cdot I_y \\ K_z \cdot I_z \end{vmatrix}.$$

3.3 Математична модель ИУС

ИУС є приладом, що здійснює вимір проекції абсолютної кутової швидкості КА на вимірювальну вісь приладу. Для виміру абсолютної кутової швидкості КА необхідно виміряти три проекції кутової швидкості на вимірювальні осі трьох пристроїв, пов'язаних певним чином з базисом E ССК.

Умовна схема переходу від базису E ССК до базису, пов'язаного з вимірювальною віссю і -го приладу (i=x, y, z), представлена на рис. 11.

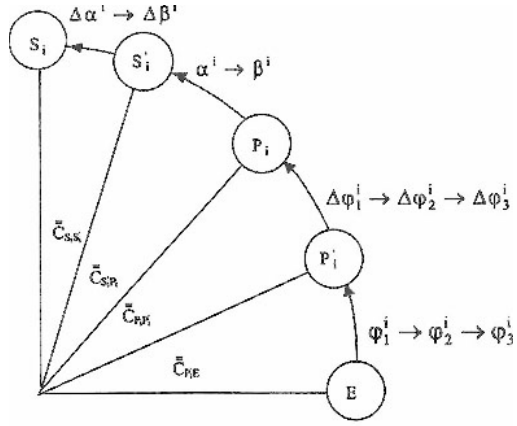

Рис. 11.

Тут $\varphi_1^{\mathrm{i}}, \varphi_2^{\mathrm{i}}, \varphi_3^{\mathrm{i}}$ – розрахункові кути установки і -го приладу у базисі Е;

$\Delta\varphi_1^{\mathrm{i}}, \Delta\varphi_2^{\mathrm{i}}, \Delta\varphi_3^{\mathrm{i}}$ – похибки кутів і-го пристрою у базисі Е;

$\alpha^{\mathrm{i}}, \beta^{\mathrm{i}}$ – розрахункові кути, що задають орієнтацію вимірювальної осі і -го пристрою у базисі $\mathrm{P_i}$;

$\Delta\alpha^{\mathrm{i}}, \Delta\beta^{\mathrm{i}}$ – похибки орієнтації вимірювальної осі і-го приладу у базисі Pi.

Матриця переходу від базису E до базису Si, пов'язаного з вимірювальною віссю і-го приладу, має вигляд

$$\bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{S_iE}} = \bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{S_iS_i'}} \cdot \bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{S_i'P_i}} \cdot \bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{P_iP_i'}} \cdot \bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{P_i'E}} = \bar{\bar{\mathrm{C}}}^{\mathrm{i}}.$$

Позначивши рядки матриць $\bar{\bar{\mathrm{C}}}^{\mathrm{x}}$, $\bar{\bar{\mathrm{C}}}^{\mathrm{y}}$, $\bar{\bar{\mathrm{C}}}^{\mathrm{z}}$ через $\bar{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{y}}, \bar{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{z}}$, j = 1,2,3, можна сформувати матрицю $\bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{SE}}$, що складається з першого рядка матриці $\bar{\bar{\mathrm{C}}}^{\mathrm{x}}$, другого рядка матриці $\bar{\bar{\mathrm{C}}}^{y}$ і третього рядка матриці $\bar{\bar{\mathrm{C}}}^{z}$, тобто

$$\bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{SE}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathrm{c}}_1^{\mathrm{x}} \\ \bar{\mathrm{c}}_2^{\mathrm{y}} \\ \bar{\mathrm{c}}_3^{\mathrm{z}} \end{vmatrix}$$

При прийнятих позначеннях для вектора, компонентами якого є проекції вектора $\bar{\omega}$ абсолютної кутової швидкості КА на вимірювальні осі ИУС (відповідні осі базисів $\mathrm{S_X}$, $\mathrm{S_Y}$, $\mathrm{S_z}$), справедливе співвідношення

$$\bar{\omega}_{\mathrm{S}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathrm{c}}_1^{\mathrm{x}} \cdot \bar{\omega}_{\mathrm{E}} \\ \bar{\mathrm{c}}_2^{\mathrm{y}} \cdot \bar{\omega}_{\mathrm{E}} \\ \bar{\mathrm{c}}_3^{\mathrm{z}} \cdot \bar{\omega}_{\mathrm{E}} \end{vmatrix},$$

де $\bar{\omega}_{\mathrm{E}}$ – вектор абсолютної кутової швидкості КА в проекціях на осі базиса Е.

Останнє співвідношення можна переписати так

$$\bar{\omega}_{\mathrm{S}} = \bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{SE}} \cdot \bar{\omega}_{\mathrm{E}}.$$

Тоді вираження для вектора $\bar{\omega}_{\mathrm{S изм}}$, компонентами якого є виміряні ИУС проекції вектора $\bar{\omega}$ абсолютної кутової швидкості КА, приймає остаточний вид

$$\bar{\omega}_{\mathrm{S изм}} = (\bar{\bar{\mathrm{K}}}_{\mathrm{n}} + \delta\bar{\bar{\mathrm{K}}}) \cdot \bar{\bar{\mathrm{C}}}_{\mathrm{SE}} \cdot \bar{\omega}_{\mathrm{E}} + \bar{\gamma},$$

де $\bar{\bar{\mathrm{K}}}_{\mathrm{n}}$ – матриця номінальних значень масштабних коефіцієнтів;

$\delta\bar{\bar{\mathrm{K}}}$ – матриця похибок масштабних коефіцієнтів;

$\bar{\gamma}$ – вектор похибок вимірів.

3.4 Математична модель сонячного датчика

При вирішені задач орієнтації КА використовується тільки інформація фотоелектричного тракту ДОК (інформація сонячного датчика). У цьому розділі описана послідовність розрахунків, що виконуються при реалізації математичної моделі ДОК, що використовується як сонячний датчик.

1.Обчислення проекцій вектору положення Сонця на осі приладової системи координат

$$\bar{s}^{p} = \bar{\bar{C}}_{pb} \cdot \bar{s}^{b},$$

де $\bar{s}^{p}$ – вектор положення Сонця, заданий проекціями на осі приладної системи координат;

$\bar{\bar{C}}_{pb}$ – матриця переходу від ССК до приладної системи координат;

$\bar{s}^{b}$ – вектор положення Сонця, заданий проекціями на осі ССК.

2. Обчислення проекцій вектору положення Сонця на осі оптичної системи координат

$$\begin{vmatrix} s_x^{op} \\ s_y^{op} \\ s_z^{op} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \cdot \bar{s}^{p},$$

де $s_x^{op}, s_y^{op}, s_z^{op}$ – проекції вектору положення Сонця на осі оптичної системи координат;

d_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ – елементи матриці переходу від приладової системи координат до оптичної системи координат, залежної від конструкції сонячного датчика.

3. Обчислення кутів α і β

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{s_y^{op}}{s_x^{op}}; \qquad \beta = \mathrm{arctg}\frac{s_z^{op}}{s_x^{op}}.$$

4. Визначення сигналу наявності Сонця

$$S_{ns} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } |\alpha| \le \alpha_{max} \text{ і } |\beta| \le \beta_{max}; \\ 0, \text{ якщо } |\alpha| > \alpha_{max} \text{ або } |\beta| > \beta_{max}, \end{cases}$$

де α_{max} – крайня точка діапазона по куту α;

β_{max} – крайня точка діапазона по куту β.

3.5 Математична модель ДМ

Математична модель ДМ формується на основі наступних початкових даних:

- діапазон зміни кінетичного моменту крутня;
- діапазон зміни, що створюється маховиком управляючого моменту;
- вхідний сигнал – необхідний управляючий момент;
- вихідна характеристика тахогенератора.

Обмеження вхідного сигналу на ДМ:

$$M_{Cj} = \begin{cases} M_{Cj}, & \text{если } |M_{Cj}| < M_{Cj}^{max}; \\ M_{CJ}^{max} \cdot sign M_{CJ}, & \text{если } |M_{Cj}| \ge M_{Cj}^{max}, \end{cases}$$

де j=x, y, z;

M_{Cj} – вхідний сигнал;
M_{Cj}^{max} – максимальне значення вхідного сигналу.

Кінетичний момент ДМ:

$$H_j = -\int_0^t M_{Cj} \cdot dt,$$

де t – поточний час.

Насичення ДМ:

$$\text{якщо } |H_j| < H_j^{max}, \quad \text{то } H_j = H_j;$$
$$\text{якщо } |H_j| \geq H_j^{max}, \quad \text{то } H_j = H_j^{max} \cdot sign H_j; \;\; M_{Cj} = 0,$$

де H_j^{max} – кінетичний момент насищення j-го ДМ.

Сигнал з датчика швидкості обертання ДМ:

$$U_{Hj} = K_{TG} \cdot H_j,$$

де K_{TG} – крутизна вихідної характеристики датчика кутової швидкості обертання ДМ.

3.6 Математична модель зоряного датчика

Зоряний датчик призначений для визначення кутового положення КА в інерціальному просторі.

Нехай $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – кватерніон, що задає орієнтацію КА в ИСК, а $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}$=$(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$ – виміряне за допомогою АИС значення цього кватерніона.

Кватерніони $\mathbf{\Lambda}$ і $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}$ пов'язані наступною залежністю:

$$\widetilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{f}, \tag{3.6.1}$$

де **f** – кватерніон похибки АИС.

Враховуючи малу похибність АИС, кватерніон можна представити як

$$\mathbf{f} = 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}, \tag{3.6.2}$$

де $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ – вектор кутових похибок АИС.

Після підстановки (3.6.2) в (3.6.1) і проведення перетворень виходять наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_0 &= \lambda_0 - 0{,}5 \cdot (\lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_2 + \lambda_3 \cdot \varepsilon_3); \\
\tilde{\lambda}_1 &= \lambda_1 + 0{,}5 \cdot (\lambda_0 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_3 - \lambda_3 \cdot \varepsilon_2); \\
\tilde{\lambda}_2 &= \lambda_2 + 0{,}5 \cdot (\lambda_0 \cdot \varepsilon_2 + \lambda_3 \cdot \varepsilon_1 - \lambda_1 \cdot \varepsilon_3); \\
\tilde{\lambda}_3 &= \lambda_3 + 0{,}5 \cdot (\lambda_0 \cdot \varepsilon_3 + \lambda_1 \cdot \varepsilon_2 - \lambda_2 \cdot \varepsilon_1).
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Система рівнянь (3.6.3) є математичною моделлю зоряного датчика (АИС). У цій моделі $\bar{\varepsilon} = |\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3|^T$ – вектор похибок визначення інерціальної орієнтації КА за допомогою АИС, $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}$ – вихідний сигнал АИС.

4 АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ

4.1 Опис алгоритму

Алгоритм рішення задачі моделювання керованого руху КА в різних режимах роботи ПОУО побудований на інтеграції системи диференціальних рівнянь (1.3.1), (1.4.4) методом Рунге-Кутта з урахуванням орбітального руху КА, зовнішніх обурень, законів управління рухом КА і математичних моделей приладів ПОУО.

Початковими умовами інтеграції рівняння (1.3.1) служать початкові значення проекцій абсолютної кутової швидкості, що задаються у початкових даних, КА на осі ССК. Для системи рівнянь (1.4.4) початкові умови інтеграції обчислюються по формулах (1.4.1) з використанням початкових значень кутів орієнтації КА, що задаються у початкових даних.

Постійні параметри орбітального руху КА (велика піввісь орбіти a, ексцентриситет e, фокальний параметр p, середня орбітальна кутова швидкість ω_0) обчислюються до інтеграції системи рівнянь по відповідних формулах з (1.2.1). Змінні параметри орбітального руху КА обчислюються по формулах (1.2.1) на кожному напівкроці інтеграції системи рівнянь (1.3.1) (1.4.4).

Сумарний вектор діючих на КА моментів, що входить в динамічне рівняння (1.3.1), визначається по формулі (1.5.1).

Управляючі рухом КА і розвантаженням ДМ моменти визначаються залежно від режиму роботи ПОУО за відповідними законами управління, описаними в розділі 2. Свідчення магнітометра, комплекту ИУС, сонячного датчика і зоряного датчика визначаються відповідно до математичних моделей приладів ПОУО, описаних в розділі 3. При цьому як тривалість такту опитування приладів ПОУО використовується тривалість шагу інтеграції системи рівнянь (1.3.1) (1.4.4). Проекції вектору магнітного моменту ЕМ на осі ССК визначаються по формулі (3.2.1).

4.2 Обчислення кутів орієнтації КА

При рішенні задачі моделювання керованого руху КА з використанням кінематичних рівнянь (1.4.4) орієнтація КА в ОСК визначається компонентами власного кватерніона переходу від ОСК до ССК.

Для отримання результатів розрахунку в традиційній формі кутів Крилова слід доповнити алгоритм формулами для обчислення цих кутів.

Згідно рис. 4 матриця $\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{b0}$ переходу від ОСК до ССК має вигляд

$$\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{b0}=\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{\psi}\cdot\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{\varphi}\cdot\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{\theta}=\begin{vmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{vmatrix},$$

де $\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{\psi}, \overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{\varphi}, \overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{\theta}$ – матриці повороту на кути ψ, φ, θ відповідно.

Останнє співвідношення можна розписати по елементах матриці $\overline{\overline{\overline{\mathrm{T}}}}_{b0}$:

$$c_{11}=\sin\psi\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta+\cos\psi\cdot\cos\theta;$$
$$c_{12}=\sin\psi\cdot\cos\varphi;$$
$$c_{13}=\sin\psi\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta-\cos\psi\cdot\sin\theta;$$

$$c_{21} = \cos\psi\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta - \sin\psi\cdot\cos\theta;$$
$$c_{22} = \cos\psi\cdot\cos\varphi;$$
$$c_{23} = \cos\psi\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta + \sin\psi\cdot\sin;$$
$$c_{31} = \cos\varphi\cdot\sin\theta;$$
$$c_{32} = -\sin\varphi;$$
$$c_{33} = \cos\varphi\cdot\cos\theta.$$

Звідси отримують наступні вирази для визначення кутів орієнтації КА в ОСК:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi = -\arcsin c_{32}; \\ \sin\theta = \frac{c_{31}}{\cos\varphi}; \quad \cos\theta = \frac{c_{33}}{\cos\varphi}; \\ \sin\psi = \frac{c_{12}}{\cos\varphi}; \quad \cos\psi = \frac{c_{22}}{\cos\varphi}. \end{array}\right\} \qquad (4.2.1)$$

Отримані співвідношення можна використовувати при рішенні задачі моделювання керованого руху КА для знаходження кутів Крилова на кожному кроці інтеграції системи рівнянь (1.3.1) (1.4.4). При цьому елементи матриць $\overline{\overline{\mathrm{T}}}_{b0}$ обчислюються по формулі (1.4.2).

4.3 Обчислення кута між напрямом на Сонце і віссю OZ ССК

Кут ζ між напрямом на Сонце і віссю OZ ССК обчислюється так

$$\zeta = \arccos s_z,$$

де s_z – проекція орти $\overline{\mathrm{s}}$ напряму на Сонце на ось OZ ССК.

ЛІТЕРАТУРА

1. Система «Січ-2». Космічний апарат МС-2-8. Розробка підсистеми визначення і управління орієнтацією: Технічне завдання. Випуск 5/ДП КБ «Південне».- Січ-2»12.7346.312 ТЗ ч.2.-Дніпропетровськ, 2008.-33с.
2. Система «Січ-2».Підсистема визначення і управління орієнтацією КА МС-2-8. Доповнення до ескізного проекту НПП «Хартрон-ЮКОМ». Запоріжжя, 2006.-116 с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика.-М.:Физматгиз,1961.-824 с.
4. Хорошилов В.С. Ввідний курс проектування космічних апаратів : Навчально-методичний посібник скоректований.\ ДП КБ «Південне», Дніпро, 2022.-138с.
5. Білоусов К., Меланченко А., Салтиков Ю. Оптимізація просторової конфігурації маховиків у задачах управління орієнтацією супутника / ДП КБ «Південне», Дніпро.- 6с.
6. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.-М.:Наука, 1973.-320с.
7. Бенькова Н.П., Тюрмина Л.О. Геомагнетизм и аэрономия.-1961.
8. ГОСТ 25645.115-84. Модель щільності атмосфери для балістичного забезпечення польотів штучних супутників Землі.
9. Tomas A/W/ Dwayer III/ Exact Nonlinear Control of Spacecraft Slewing Maneuvers with Interval Momentum Transfer/ Journal of Guidance, Control and Dynamics.-1986.-2.-P/20-247/
10. Т.А.У. Дуайер III. Точное нелинейное управление быстрыми вращениями КЛА посредством внутренней передачи количества движения.- Аэрокосмическая техника, 1987, №3, с.151-159.