



ПІВДЕННЕ

Державне підприємство
"Конструкторське бюро "Південне" ім. М.К. Янгеля"

Практичні заняття до курсу
«Ймовірнісний підхід до розв’язання задач проектування систем РКТ»
спеціальність «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» (код 134)

Підготував:
головний науковий співробітник
ДП «КБ «Південне»,
д.т.н. Гладкий Е.Г.

Дніпро
2022

Задача 1. Визначити ймовірність безвідмовної роботи міжступеневої ферми РН (див. рисунок1), що складається із N стрижнів трубчастого перерізу (параметри r , δ , див. рисунок 2). В розрахунках надійності, зробимо такі припущення:

- на працездатність ферми впливають лише стрижні ферми; закінцівки, що забезпечують стикування ферми до суміжних відсіків в розрахунках надійності не враховуємо;
- всі стрижні ферми працюють незалежно;
- для того щоб ферма виконувала свою функціональну задачу жоден із стрижнів не повинен втратити міцності;
- кожен із стрижнів навантажено відомою осьювою стискаючою силою (T), а працездатність кожного стрижня пов'язана з виконанням однієї умови працездатності, а саме втрати стійкості за формулою Ейлера.

Отже, виходячи з висунутих припущень, надійність між ступеневої ферми визначається за формулою

$$P_{\Sigma} = P_{cm}^N,$$

де P_{cm} – імовірність безвідмовної роботи одного стрижня. В нашому випадку працездатність стрижня визначає одна умова, а саме загальна стійкість, що визначається формулою Ейлера. Умова працездатності для одного стрижня має вигляд

$$T^{кр} \geq T^{\partial},$$

де $T^{кр}$ – критична стискаюча сила, що визначається формулою Ейлера; T^{∂} – розрахункова стискаюча сила, що діє на окремий стрижень.

Формула Ейлера для критичної сили має наступний вигляд

$$T^{кр} = \frac{c\pi^2 EI}{l^2},$$

де c – коефіцієнт защемлення закінцівок (в нашому випадку приймаємо, що $c = 1$); E – модуль пружності матеріалу стрижня; I – момент інерції поперечного перетину стрижня; l – довжина стрижня. Для трубчатого

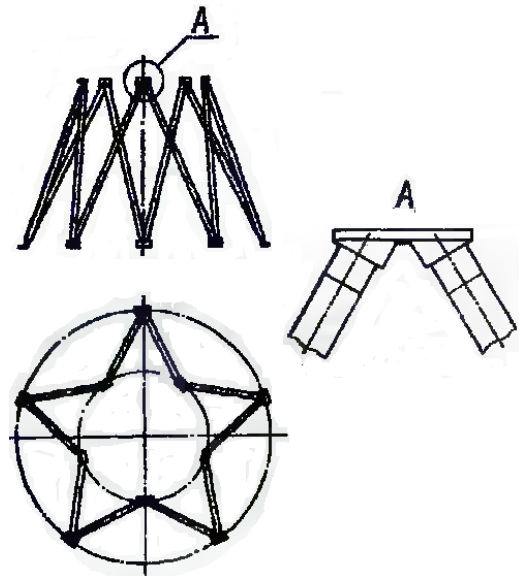


Рисунок 1 - Ферма РН

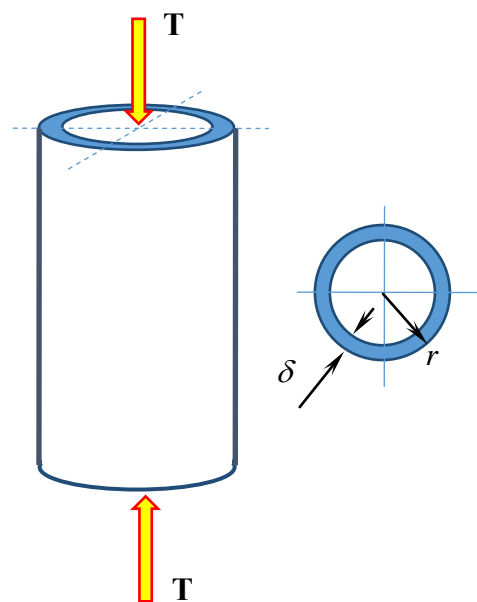


Рисунок 2 – Стрижень трубчастого перетину

перерізу з незначною товщиною момент інерції перетину наближено може бути визначено за формулою $I \approx \pi r^3 \delta$.

Перепишемо умову працездатності в напруженнях, тобто віднесемо сили до площі поперечного перетину, яка приблизно дорівнює $S \approx 2\pi r \delta$. У підсумку умову працездатності стрижня напишемо у вигляді (формалізована форма із нулем у правій частині)

$$Z(l, r, \delta, E, T) = \frac{c\pi^2 E r^2}{2l^2} - \frac{f_T T}{2\pi r \delta} > 0.$$

Використаємо для розрахунку надійності лінійну модель. Вважаємо, що всі параметри, які входять в умову працездатності є нормальними випадковими величинами. Згідно лінійної моделі, ІБР для одного стрижня буде визначатися наступним чином

$$P_{cm} = \Pr(Z \geq 0) = \Phi\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right),$$

де m_Z , σ_Z – математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення ЗСЗ, що визначаються за формулами (дивись (2.9), (2.11))

$$m_Z = \frac{c\pi^2 m_E m_r^2}{2m_l^2} - \frac{f_T m_T}{2\pi m_r m_\delta};$$

$$\sigma_Z^2 = \left(\frac{c\pi^2 m_r^2}{2m_l^2}\right)^2 \sigma_E^2 + \left(\frac{c\pi^2 m_E m_r}{m_l^2} + \frac{f_T m_T}{2\pi m_r^2 m_\delta}\right)^2 \sigma_r^2 +$$

$$+ \left(-\frac{c\pi^2 m_E m_r^2}{m_l^3}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(-\frac{f_T}{2\pi m_r m_\delta}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{f_T m_T}{2\pi m_r m_\delta^2}\right)^2 \sigma_\delta^2,$$

де $m_{[\cdot]}$, $\sigma_{[\cdot]}$ – математичні сподівання та середні квадратичні відхилення параметрів, що входять в умову працездатності.

Визначення надійності для конкретних вихідних даних з використанням пакету математичних обчислень MathCAD показано на рисунку 3.

ORIGIN := 1

Умова працездатності

$$f_T := 1.3 \quad c := 1$$

$$f(E, r, l, T, \delta) := \frac{c \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{2 \cdot l^2} - \frac{f_T \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta}$$

Вихідні данні по первинним змінним

$$m_E := 1.9 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2 \quad \sigma_E := 9.5 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$$

$$m_r := 7.6 \text{ см} \quad \sigma_r := 0.1 \text{ см}$$

$$m_l := 190 \text{ см} \quad \sigma_l := 0.2 \text{ см}$$

$$m_T := 1.7 \cdot 10^4 \text{ кгс} \quad \sigma_T := 1.7 \cdot 10^3 \text{ кгс}$$

$$m_\delta := 0.45 \text{ см} \quad \sigma_\delta := 0.02 \text{ см}$$

Визначення математичного сподівання ЗС

$$m_Z := f(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)$$

$$m_Z = 471.722$$

Визначення дисперсії ЗС

$$f_{l_E}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dE} f(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{l_l}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dl} f(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{l_T}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dT} f(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{l_r}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dr} f(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{l_\delta}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{d\delta} f(E, r, l, T, \delta)$$

Рисунок 3 - Лістинг MathCAD-документу оцінювання надійності ферми РН

$$fl_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 7.896 \times 10^{-3}$$

$$fl_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = -0.06$$

$$fl_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 530.108$$

$$fl_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 2.285 \times 10^3$$

$$fl_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = -15.791$$

$$D_Z := \left(fl_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_E^2 + fl_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_T^2 \right) \dots \\ + \left(fl_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_I^2 + fl_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_\delta^2 \right) \dots \\ + fl_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_I^2$$

$$D_Z = 2.111 \times 10^4$$

$$\sigma_Z := \sqrt{D_Z}$$

$$\sigma_Z = 145.303$$

Визначення ІБР

$$\frac{m_Z}{\sigma_Z} = 3.246$$

$$P := \text{snorm}\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right)$$

$$P = 0.9994$$

Надійність міжступеневої ферми загалом

$$N := 10$$

$$P^N = 0.994$$

Рисунок 3 - Лістинг MathCAD-документу оцінювання надійності ферми РН (продовження)

Задача 2. Виходячи з вихідних даних задачі 1, розрахувати ІБР для одного стрижня міжступеневої ферми РН, використовуючи модель «навантаження-несуча здатність».

Згідно моделі «навантаження-несуча здатність», запишемо навантаження та несучу здатність як функції первинних змінних

$$R = \frac{c\pi^2 Er^2}{2l^2}; S = \frac{f_T T}{2\pi r \delta}.$$

Значення математичних сподівань та дисперсій R і S розраховуються з використанням формул

$$m_R = R(\bar{m}), m_S = S(\bar{m}),$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial m_i} \right)^2 \sigma_i^2, \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial m_i} \right)^2 \sigma_i^2.$$

Після цього за формулою (2.15)

$$P = \Phi \left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right)$$

визначається ІБР для одного стрижня. Відповідні розрахунки наведено на рисунку 4.

Порівнюючи отримане значення ІБР стрижня для моделі «навантаження-несуча здатність» з результатом, що наведено на рисунку 3 (модель зі змінною стану), бачимо, що ІБР в останньому випадку виявилася більшою (для високих значень показника безвідмовності різниця не так помітна, проте, якщо рівень ІБР буде нижче, різниця буде більш суттєва). Пояснюється це тим, що хоча первинні змінні, які входять до формул R і S є незалежними, проте самі параметри навантаження та несучої здатності є залежними (залежать від одного параметра, а саме радіусу r). Отже треба знайти коваріаційний момент і коефіцієнт лінійної кореляції між випадковими величинами R і S

$$K_{RS} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial m_i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial m_i} \right) \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial m_i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial m_j} \right) \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \rho_{RS} = \frac{K_{RS}}{\sigma_R \sigma_S}$$

і використати для розрахунку ІБР формулу (2.16). Відповідні розрахунки показано на рисунку 5.

Видно, що в цьому разі значення ІБР для одного стрижня для обох моделей співпали.

Модель "Навантаження-несуча здатність"

$$f_T := 1.3 \quad c := 1$$

Несуча здатність (R)

$$R(E, r, l, T, \delta) := \frac{c \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{2 \cdot l^2}$$

Навантаження (S)

$$S(E, r, l, T, \delta) := \frac{f_T \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta}$$

Вихідні данні по первинним змінним

$$m_E := 1.9 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$$

$$\sigma_E := 9.5 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$$

$$m_r := 7.6 \text{ см}$$

$$\sigma_r := 0.1 \text{ см}$$

$$m_l := 190 \text{ см}$$

$$\sigma_l := 0.2 \text{ см}$$

$$m_T := 1.7 \cdot 10^4 \text{ кгс}$$

$$\sigma_T := 1.7 \cdot 10^3 \text{ кгс}$$

$$m_\delta := 0.45 \text{ см}$$

$$\sigma_\delta := 0.02 \text{ см}$$

Визначення математичних сподівань R і S

$$m_R := R(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)$$

$$m_S := S(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)$$

$$m_R = 1.5 \times 10^3$$

$$m_S = 1.028 \times 10^3$$

Визначення дисперсій R і S

$$f_{R_E}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dE} R(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{S_E}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dE} S(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{R_l}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dl} R(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{S_l}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dl} S(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{R_T}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dT} R(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{S_T}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dT} S(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{R_r}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dr} R(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{S_r}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dr} S(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{R_\delta}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{d\delta} R(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{S_\delta}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{d\delta} S(E, r, l, T, \delta)$$

Рисунок 4 - Лістинг MathCAD-документу оцінювання надійності стрижня ферми РН з використанням моделі «навантаження-несуча здатність»

$$\begin{array}{ll}
fR_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 7.896 \times 10^{-3} & fS_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 0 \\
fR_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 0 & fS_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 0.06 \\
fR_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 394.784 & fS_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = -135.323 \\
fR_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 0 & fS_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = -2.285 \times 10^3 \\
fR_1(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = -15.791 & fS_1(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_R := & \left(fR_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_E^2 + fR_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_T^2 \right) \dots \\
& + \left(fR_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_I^2 + fR_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_\delta^2 \right) \dots \\
& + fR_1(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_1^2
\end{aligned}$$

$$D_R = 7.195 \times 10^3$$

$$\begin{aligned}
D_S := & \left(fS_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_E^2 + fS_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_T^2 \right) \dots \\
& + \left(fS_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_I^2 + fS_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_\delta^2 \right) \dots \\
& + fS_1(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_1^2
\end{aligned}$$

$$D_S = 1.285 \times 10^4$$

Визначення надійності для одного стрижня (R і S вважаються незалежними)

$$\text{snorm} \left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{D_R + D_S}} \right) = 0.9996$$

Рисунок 4 - Лістинг MathCAD-документу оцінювання надійності стрижня ферми РН з використанням моделі «навантаження-несуча здатність» (продовження)

Коваріація між R і S

$$K_{RS} := \left[\begin{aligned} & \left(fR_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot fS_E(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_E^2 \right) \dots \\ & + fR_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot fS_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_T^2 \dots \\ & + \left(fR_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot fS_I(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_I^2 \right) \dots \\ & + \left(fR_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot fS_T(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_T^2 \right) \dots \\ & + fR_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot fS_\delta(m_E, m_T, m_I, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_\delta^2 \end{aligned} \right]$$

$$K_{RS} = -534.235$$

Визначення надійності одного стрижня (враховано залежність між R і S)

$$\text{snorm} \left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{D_R + D_S - 2 \cdot K_{RS}}} \right) = 0.9994$$

Рисунок 5 - Лістинг MathCAD-документу оцінювання надійності стрижня ферми РН з використанням моделі «навантаження-несуча здатність» (враховано залежність між R і S)

Задача 3. Визначити ймовірність безвідмовної роботи стрижня міжступеневої ферми РН в рамках задачі 1, використовуючи метод Монте Карло.

Визначення показника безвідмовності стрижня методом Монте-Карло наведено на рисунку 6.

ORIGIN := 1

Умова працездатності

$$f_T := 1.3 \quad c := 1$$

$$f(E, r, l, T, \delta) := \frac{c \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{2 \cdot l^2} - \frac{f_T \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta}$$

Вихідні данні по первинним змінним

$m_E := 1.9 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$	$\sigma_E := 9.5 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$
$m_r := 7.6 \text{ см}$	$\sigma_r := 0.1 \text{ см}$
$m_l := 190 \text{ см}$	$\sigma_l := 0.2 \text{ см}$
$m_T := 1.7 \cdot 10^4 \text{ кгс}$	$\sigma_T := 1.7 \cdot 10^3 \text{ кгс}$
$m_\delta := 0.45 \text{ см}$	$\sigma_\delta := 0.02 \text{ см}$

$N := 50000 \quad i := 1..N$

Всі первинні змінні - нормальні випадкові величини

Моделювання випадкових величин

$$E := \text{norm}(N, m_E, \sigma_E) \quad r := \text{norm}(N, m_r, \sigma_r)$$

$$l := \text{norm}(N, m_l, \sigma_l) \quad T := \text{norm}(N, m_T, \sigma_T)$$

$$\delta := \text{norm}(N, m_\delta, \sigma_\delta)$$

Отримання реалізацій ЗС (Z)

$$Z_i := f(E_i, r_i, l_i, T_i, \delta_i)$$

$Z^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	437.1	196.2	565.6	451.4	320.5	704.7	248.2	...

Рисунок 6 – Визначення ІБР одного стрижня міжступеневої ферми РН методом Монте-Карло

Визначення середнього та середнього квадратичного відхилення вибірки

$$m_Z := \text{mean}(Z) \quad m_Z = 470.1$$

$$\sigma_Z := \text{stdev}(Z) \quad \sigma_Z = 145.5$$

Оцінка надійності

$$\frac{\sum_{i=1}^N (Z_i > 0)}{N} = 0.99906$$

Побудова гістограми

	1	2
1	-77.921	10
2	-30.203	30
3	17.516	68
4	65.234	153
5	112.952	350
6	160.67	735
7	208.388	1.25·10 ³
8	256.106	2.231·10 ³
9	303.824	3.348·10 ³
10	351.542	4.507·10 ³
11	399.26	5.785·10 ³
12	446.978	6.512·10 ³
13	494.696	6.548·10 ³
14	542.414	5.807·10 ³
15	590.132	4.634·10 ³
16	637.851	...

histogram(25, Z) =

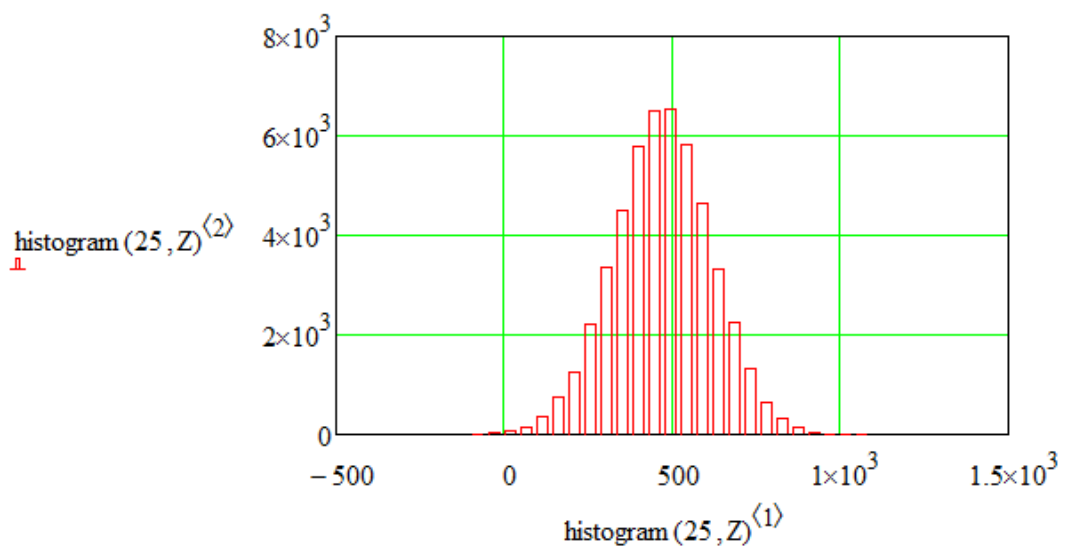


Рисунок 6 – Визначення ІБР одного стрижня міжступеневої ферми РН методом Монте-Карло (продовження)

Задача 4. Визначити імовірність безвідмовної роботи міжступеневої ферми РН (за вихідними даними задачі 1), для випадку, коли працездатність окремого стрижня визначається двома умовами: загальною втратою стійкості за формулою Ейлера та загальною втратою стійкості стрижня як оболонки.

Друга умова працездатності стрижня міжступеневої ферми в напруженнях має наступний вигляд

$$Z_2(l, r, \delta, E, T) = \frac{kE\delta}{r} - \frac{f_T T}{2\pi r \delta} > 0,$$

де k – коефіцієнт стійкості ($k = 0,15$).

Розрахунок за другою умовою працездатності здійснюємо аналогічним чином, як і для першої умови працездатності. Результати розрахунків наведено на рисунку 7.

При визначенні надійності окремого стрижня на рисунку 7 розглянуто випадок, коли змінні стану Z_1 і Z_2 вважаються незалежними.

В той же час, хоча первинні змінні, що входять в умови працездатності і є незалежними, проте Z_1 і Z_2 є залежними. Це обумовлено тим, що умови працездатності містять одні і ті ж первинні змінні. У загальному випадку коваріаційний момент визначається за формулою

$$K_{Z_k, Z_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_i} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial m_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}^{(1,1)}.$$

Враховуючи, що первинні змінні незалежні, другий доданок у формулі буде дорівнювати нулю.

Розрахунок коваріаційного моменту, коефіцієнта лінійної кореляції та ІБР у випадку лінійно залежних Z_1 і Z_2 показано на рисунку 8.

Кількість стрижневий ферми $\underline{N} := 10$

Вихідні дані по первинним змінним

$$m_E := 1.9 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$$

$$\sigma_E := 9.5 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$$

$$m_r := 7.6 \text{ см}$$

$$\sigma_r := 0.1 \text{ см}$$

$$m_l := 190 \text{ см}$$

$$\sigma_l := 0.2 \text{ см}$$

$$m_T := 1.7 \cdot 10^4 \text{ кгс}$$

$$\sigma_T := 1.7 \cdot 10^3 \text{ кгс}$$

$$m_\delta := 0.45 \text{ см}$$

$$\sigma_\delta := 0.02 \text{ см}$$

$$f_T := 1.3$$

1. Умова стійкості трубчатого стрижня - формула Ейлера в напруженнях

$$\underline{c} := 1$$

$$f_1(E, r, l, T, \delta) := \frac{c \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{2 \cdot l^2} - \frac{f_T \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta}$$

Визначення математичного сподівання

$$m_{Z1} := f_1(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)$$

$$m_{Z1} = 471.722$$

Визначення дисперсії і середнього квадратичного відхилення

$$f_{1_E}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dE} f_1(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{1_r}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dr} f_1(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{1_l}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dl} f_1(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{1_T}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{dT} f_1(E, r, l, T, \delta)$$

$$f_{1_delta}(E, r, l, T, \delta) := \frac{d}{d\delta} f_1(E, r, l, T, \delta)$$

$$D_{Z1} := \left[f_{1_E}(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_E^2 + f_{1_r}(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)^2 \cdot (\sigma_r)^2 \right] \dots \\ + \left[f_{1_l}(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_l^2 + f_{1_T}(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_T^2 \right] \dots \\ + f_{1_delta}(m_E, m_r, m_l, m_T, m_\delta)^2 \cdot (\sigma_\delta)^2$$

Рисунок 7 – Розрахунок ІБР міжступеневої ферми для випадку двох умов працездатності для стрижня

$$D_{Z1} = 2.111 \times 10^4$$

$$\sigma_{Z1} := \sqrt{D_{Z1}}$$

$$\sigma_{Z1} = 145.303$$

Визначення ІБР

$$\frac{m_{Z1}}{\sigma_{Z1}} = 3.246 \quad P_1 := \text{cnorm}\left(\frac{m_{Z1}}{\sigma_{Z1}}\right)$$

$$P_1 = 0.999416$$

2. Умова стійкості трубчатого стрижня як оболонки в напруженнях

$$k := 0.15$$

$$f_2(E, r, T, \delta) := \frac{k \cdot E \cdot \delta}{r} - \frac{f_T \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta}$$

Визначення математичного сподівання

$$m_{Z2} := f_2(m_E, m_r, m_T, m_\delta)$$

$$m_{Z2} = 659.043$$

Визначення дисперсії і середнього квадратичного відхилення

$$f_{2_E}(E, r, T, \delta) := \frac{d}{dE} f_2(E, r, T, \delta)$$

$$f_{2_r}(E, r, T, \delta) := \frac{d}{dr} f_2(E, r, T, \delta)$$

$$f_{2_T}(E, r, T, \delta) := \frac{d}{dT} f_2(E, r, T, \delta)$$

$$f_{2_delta}(E, r, T, \delta) := \frac{d}{d\delta} f_2(E, r, T, \delta)$$

$$D_{Z2} := f_{2_E}(m_E, m_r, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_E^2 + f_{2_r}(m_E, m_r, m_T, m_\delta)^2 \cdot (\sigma_r)^2 \dots \\ + f_{2_T}(m_E, m_r, m_T, m_\delta)^2 \cdot \sigma_T^2 + f_{2_delta}(m_E, m_r, m_T, m_\delta)^2 \cdot (\sigma_\delta)^2$$

$$D_{Z2} = 3.234 \times 10^4$$

$$\sigma_{Z2} := \sqrt{D_{Z2}}$$

$$\sigma_{Z2} = 179.84$$

Рисунок 7 – Розрахунок ІБР міжступеневої ферми для випадку двох умов працездатності для стрижня (продовження)

Визначення ІБР

$$\frac{m_{Z2}}{\sigma_{Z2}} = 3.665 \quad P_2 := \text{snorm}\left(\frac{m_{Z2}}{\sigma_{Z2}}\right) \quad P_2 = 0.999876$$

Визначення ІБР для ферми в цілому (незалежні Z_1 і Z_2)

$$P_1 \cdot P_2 = 0.9993$$

$$(P_1 \cdot P_2)^N = 0.992942$$

Рисунок 7 – Розрахунок ІБР міжступеневої ферми для випадку двох умов працездатності для стрижня (продовження)

Визначення коваріаційного моменту і коефіцієнта лінійної кореляції між Z_1 і Z_2

$$\begin{aligned} K_{Z1Z2} := & f_{1_E}(m_E, m_T, m_1, m_T, m_\delta) \cdot f_{2_E}(m_E, m_T, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_E^2 \dots \\ & + f_{1_r}(m_E, m_T, m_1, m_T, m_\delta) \cdot f_{2_r}(m_E, m_T, m_T, m_\delta) \cdot (\sigma_r)^2 \dots \\ & + f_{1_T}(m_E, m_T, m_1, m_T, m_\delta) \cdot f_{2_T}(m_E, m_T, m_T, m_\delta) \cdot \sigma_T^2 \dots \\ & + f_{1_d}(m_E, m_T, m_1, m_T, m_\delta) \cdot f_{2_d}(m_E, m_T, m_T, m_\delta) \cdot (\sigma_d)^2 \end{aligned}$$

$$K_{Z1Z2} = 2.196 \times 10^4$$

$$\rho_{Z1Z2} := \frac{K_{Z1Z2}}{\sigma_{Z1} \cdot \sigma_{Z2}}$$

$$\rho_{Z1Z2} = 0.841$$

Визначення ІБР для ферми в цілому (лінійно залежні Z_1 і Z_2)

$$\Phi_2(t_1, t_2) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - \rho_{Z1Z2}^2}} \cdot \int_{-5}^{t_1} \int_{-5}^{t_2} \exp\left[\frac{-1}{2(1 - \rho_{Z1Z2}^2)} \cdot (x^2 - 2 \cdot \rho_{Z1Z2} \cdot x \cdot y + y^2)\right] dx dy$$

$$P_{12} := P_1 + P_2 - 1 + \Phi_2\left(-\frac{m_{Z1}}{\sigma_{Z1}}, -\frac{m_{Z2}}{\sigma_{Z2}}\right)$$

$$P_{12} = 0.999356$$

$$(P_{12})^N = 0.993579$$

Рисунок 8 – Розрахунок ІБР для залежних Z_1 і Z_2

Задача 5. Спроекувати торовий балон високого тиску (рисунок 7) мінімальної маси (габарити R, r , робочий тиск $p_{вн}$) об'ємом V з урахуванням вимог до надійності ($P_{потр}$), а також обмежень на його габарити (L_{min}, L_{max}). Матеріал баку титановий сплав.

Параметри процесу проектування вважаються незалежними і нормальними. В якості керуючих параметрів процесу проектування розглянемо радіуси (R, r) та товщину оболонки (δ).

Вихідні дані: $p_{вн} = 30$ МПа (врахувати коефіцієнт безпеки 1,3), $V = 0,2$ м³, $\sigma_{\delta} = 900$ МПа, $P_{потр} = 0,9999$, $L_{min} = 2$ м, $L_{max} = 3$ м. Коефіцієнти варіації для параметрів (для отримання середніх квадратичних відхилень) $\gamma_{p_{вн}} = 0,15$, $\gamma_{\sigma_{\delta}} = 0,07$, $\gamma_r = 0,03$, $\gamma_{\delta} = 0,02$.

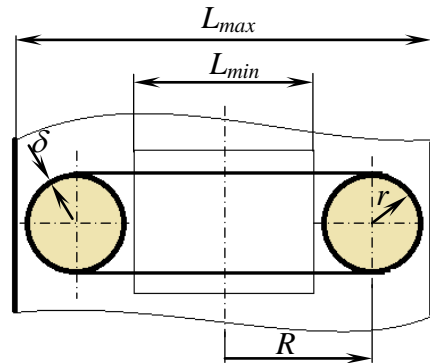


Рисунок 7 – Торовий балон високого тиску

Розв'язання.

В якості цільової функції розглянемо масу торового балона високого тиску. Для тонкостінного балона вона визначається наступним чином:

$$M = S_{\delta n} \cdot \delta \rho,$$

де $S_{\delta n}$ – площа бічної поверхні торового балона; δ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу.

Площу бічної поверхні визначимо за формулою

$$S_{\delta n} = 4\pi^2 Rr.$$

Отже для маси балону маємо

$$M = 4\pi^2 Rr\delta\rho = KRr\delta,$$

де $K = 4\pi^2\rho$.

Формулювання задачі: треба забезпечити мінімум маси торового балона

$$M = KRr\delta \rightarrow \min.$$

за наступних обмежень:

1. Обмеження щодо об'єму балона

$$V = V_{потр},$$

де $V = 2\pi^2 Rr^2$ – об'єм торового балона.

2. Виконання вимог до надійності.

Умова працездатності – оболонка торового балону не руйнується під дією внутрішнього тиску

$$Z = \sigma_{\delta} - \frac{f_p p_{вн} \cdot r}{\delta} \geq 0,$$

де σ_{δ} – межа міцності матеріалу; $p_{вн}$ – внутрішній тиск.

Отже для виконання вимоги щодо надійності запишемо

$$\Pr(Z \geq 0) = \Pr\left\{\sigma_{\epsilon} - \frac{P_{\text{вн}} \cdot r}{\delta} \geq 0\right\} = P_{\text{номр}}.$$

3. Умови щодо габаритів балона

$$R + r < \frac{L_{\text{max}}}{2};$$

$$R - r > \frac{L_{\text{min}}}{2}.$$

4. Умова технологічності

$$\delta \geq \delta_{\text{min}}.$$

Враховуючи, що керуючі параметри нормальні випадкові величини, потрібно визначити (m_R, σ_R) , (m_r, σ_r) , $(m_\delta, \sigma_\delta)$. Розкиди знайдемо, виходячи з коефіцієнтів варіації зазначених випадкових змінних. Отже керуючими параметрами процесу оптимізації є математичні сподівання m_R, m_r, m_δ .

В результаті для цільової функції маємо

$$M(m_R, m_r, m_\delta) = K \cdot m_R \cdot m_r \cdot m_\delta \rightarrow \min.$$

Обмеження записуються у вигляді:

1. Вимога щодо об'єму

$$2\pi^2 m_R m_r^2 = V_{\text{номр}};$$

2. Надійність визначаємо з використанням методу лінеаризації

$$\frac{m_Z(m_R, m_r, m_\delta)}{\sqrt{D_Z(m_R, m_r, m_\delta)}} = t_\gamma,$$

де

$$m_Z(m_R, m_r, m_\delta) = m_{\sigma_\epsilon} - \frac{f_p m_p m_r}{m_\delta}$$

$$D_Z(m_R, m_r, m_\delta) = \sigma_{\sigma_\epsilon}^2 + \left(\frac{f_p m_r}{m_\delta}\right)^2 (m_p \gamma_p)^2 +$$

$$+ \left(\frac{f_p m_p}{m_\delta}\right)^2 (m_r \gamma_r)^2 + \left(\frac{f_p m_p m_r}{m_\delta^2}\right)^2 (m_\delta \gamma_\delta)^2;$$

3. габарити

$$m_R + m_r < \frac{L_{\text{max}}}{2}$$

$$m_R - m_r > \frac{L_{\text{min}}}{2}.$$

4. технологічність

$$m_\delta \geq \delta_{\text{min}}.$$

Результати оптимізації з використанням пакету математичних обчислень MathCAD наведено на рисунку 8.

Вихідні дані:

Потрібний об'єм $V_{\text{потр}} := 0.2 \text{ м}^3$

Навантаження: внутрішній тиск $P := 30 \cdot 10^6 \text{ Па}$
 $f_p := 1.3$

Межа міцності матеріалу оболонки балона $\sigma_B := 900 \cdot 10^6 \text{ Па}$

Густина матеріалу оболонки $\rho := 4450 \text{ кг/м}^3$

Габаритні обмеження $L_{\text{max}} := 1.5 \text{ м}$ $L_{\text{min}} := 1.0 \text{ м}$

РОЗРАХУНОК

Математичні сподівання параметрів

$$m_P := P \quad m_{\sigma_B} := \sigma_B$$

Коефіцієнти варіації

$$\gamma_{\sigma_B} := 0.07 \quad \gamma_P := 0.15 \quad \gamma_r := 0.03 \quad \gamma_{\delta} := 0.02$$

Середні квадратичні відхилення

$$\sigma_{\sigma_B} := m_{\sigma_B} \cdot \gamma_{\sigma_B} \quad \sigma_P := m_P \cdot \gamma_P$$

Квантиль нормального розподілу

$$\text{snorm}(3.72) = 0.9999 \quad t := 3.72$$

Цільова функція (маса балона)

$$M(m_R, m_Y, m_{\delta}) := 4 \cdot \pi^2 \cdot m_R \cdot m_Y \cdot m_{\delta} \cdot \rho$$

Об'єм балона

$$V(m_R, m_Y, m_{\delta}) := 2 \cdot \pi^2 \cdot m_R \cdot m_Y^2$$

Визначення надійності

Змінна стану (умова працездатності)

$$Z(\sigma_B, P, r, \delta) := \sigma_B - \frac{f_p \cdot P \cdot r}{\delta}$$

Математичне сподівання

$$m_Z(m_R, m_Y, m_{\delta}) := m_{\sigma_B} - \frac{f_p \cdot m_P \cdot m_Y}{m_{\delta}}$$

Рисунок 8 – Лістинг MathCAD-документу оптимізації торового балону

Дисперсія

$$f_1(\sigma_B, P, r, \delta) := \frac{d}{d\sigma_B} Z(\sigma_B, P, r, \delta) \quad f_2(\sigma_B, P, r, \delta) := \frac{d}{dP} Z(\sigma_B, P, r, \delta)$$

$$f_3(\sigma_B, P, r, \delta) := \frac{d}{dr} Z(\sigma_B, P, r, \delta) \quad f_4(\sigma_B, P, r, \delta) := \frac{d}{d\delta} Z(\sigma_B, P, r, \delta)$$

$$D(m_R, m_Y, m_\delta) := \left[\begin{array}{l} f_1(m_{\sigma_B}, m_P, m_r, m_\delta)^2 \cdot \sigma_{\sigma_B}^2 + f_2(m_{\sigma_B}, m_P, m_r, m_\delta)^2 \cdot \sigma_P^2 \dots \\ + f_3(m_{\sigma_B}, m_P, m_r, m_\delta)^2 \cdot (m_r \cdot \gamma_r)^2 + f_4(m_{\sigma_B}, m_P, m_r, m_\delta)^2 \cdot (m_\delta \cdot \gamma_\delta)^2 \end{array} \right]$$

$$F(m_R, m_Y, m_\delta) := \frac{m_Z(m_R, m_Y, m_\delta)}{\sqrt{D(m_R, m_Y, m_\delta)}}$$

Початкові значення керуючих параметрів

$$m_R := 1.2 \quad m_Y := 0.3 \quad m_\delta := 0.002$$

Given

$$V(m_R, m_Y, m_\delta) = V_{\text{потр}}$$

$$F(m_R, m_Y, m_\delta) = t$$

$$m_R + m_Y \leq L_{\text{max}}$$

$$m_R - m_Y \geq L_{\text{min}}$$

$$m_\delta \geq 0.0015$$

$$\begin{pmatrix} R_{\text{opt}} \\ r_{\text{opt}} \\ \delta_{\text{opt}} \end{pmatrix} := \text{Minimize}(M, m_R, m_Y, m_\delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_{\text{opt}} \\ r_{\text{opt}} \\ \delta_{\text{opt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.307 \\ 0.088 \\ 6.587 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{Оптимальні значення параметрів оптимізації}$$

Перевірка результату

$$V(R_{\text{opt}}, r_{\text{opt}}, \delta_{\text{opt}}) = 0.199$$

$$F(R_{\text{opt}}, r_{\text{opt}}, \delta_{\text{opt}}) = 3.72$$

$$M(R_{\text{opt}}, r_{\text{opt}}, \delta_{\text{opt}}) = 132.9$$

Рисунок 8 – Лістинг MathCAD-документу оптимізації торового балону (продовження)

Розмірність задачі, тобто кількість керуючих параметрів процесу оптимізації, можна було б зменшити, використовуючи умову щодо забезпечення потрібного об'єму балону. Виходячи із цього обмеження, радіус торового балону дорівнюватиме

$$R = \frac{V_{\text{номп}}}{2\pi^2 r^2}.$$

Отже отриманий вираз для R треба було підставити у цільову функцію і обмежень щодо габаритів. Зрештою в задачі залишилось би два керуючих параметра оптимізації (m_r, m_δ).

Задача 6. Визначити показники довговічності (середній ресурс і гама-відсотковий ресурс) системи тривалого функціонування з урахуванням ефективності для структурної схеми, представлені на рисунку 9 і вихідних даних (таблиця). В комірках таблиці перша цифра(числівник) – інтенсивність відмов (год⁻¹); друга (знаменник) - ефективність у випадку працездатного стану елемента. У випадку відмови ефективність елемента дорівнює нулю.

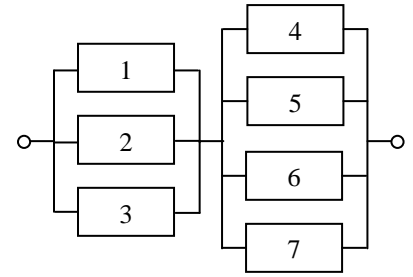


Рисунок 9 – ССН ТС

Вихідні дані для розрахунку показників довговічності ТС

Елементи							E_*	%, %
1	2	3	4	5	6	7		
$\frac{7.0 \cdot 10^{-4}}{0,3}$	$\frac{6.0 \cdot 10^{-4}}{0,3}$	$\frac{4.0 \cdot 10^{-4}}{0,4}$	$\frac{4.0 \cdot 10^{-4}}{0,4}$	$\frac{2.5 \cdot 10^{-4}}{0,3}$	$\frac{5.0 \cdot 10^{-4}}{0,2}$	$\frac{6.0 \cdot 10^{-4}}{0,1}$	0,65	80

Розв'язання.

Розрахунок виконується з використанням пакету математичних обчислень MathCAD (рисунок 10).

1. Моделюється тривалість роботи елементів $t_i, i = \overline{1,7}$ (для певної кількості ітерацій методу Монте-Карло, розглянуто $N=10000$).

2. Визначається максимальний час роботи ТС (для випадку, коли ефективність не враховується).

3 Проміжок часу функціонування від нуля до максимального значення точками $T_c^{(i)} (i = \overline{1, k})$ розбивається на інтервали однакової довжини. Точки $T_c^{(i)}$ - суть перерізу часу, k – кількість перерізів.

4. У кожному перерізі часу $T_c^{(i)}$ визначається поточне значення ефективності $E_c^{(i)}$ з урахуванням працюючих і елементів, що відмовили. З'єднуючи відповідні точки $E_c^{(i)}$, отримуємо траєкторію випадкового процесу $E(t)$ зміни ефективності, що представляє одну реалізацію процесу функціонування КА.

5. У кожному перерізі часу $T_c^{(i)}$ для отриманої статистики щодо ефективності функціонування системи, визначається середня ефективність $\bar{E}_c^{(i)}$. Будується між перерізами з'єднується прямими. Визначається переріз часу, для якого ми отримуємо середнє значення що дорівнює E_* .

6. У кожному перерізі часу $T_c^{(i)}$ для отриманої статистики щодо ефективності функціонування системи визначається ймовірність того, що ВВ $E_c^{(i)}$ перевищить критичний рівень E_* . Будується між перерізами з'єднується прямими. Визначається переріз часу, для якого ймовірність $\Pr\{E \geq E_*\} = \gamma$.

ORIGIN := 1

Вихідні дані:

Інтенсивності відмов елементів

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= 7.0 \cdot 10^{-4} & \lambda_2 &:= 6.0 \cdot 10^{-4} & \lambda_3 &:= 4.0 \cdot 10^{-4} \\ \lambda_4 &:= 3.5 \cdot 10^{-4} & \lambda_5 &:= 5.0 \cdot 10^{-4} & \lambda_6 &:= 6.5 \cdot 10^{-4} & \lambda_7 &:= 6.5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Ефективності елементів

$$\begin{aligned} e_1 &:= 0.3 & e_2 &:= 0.3 & e_3 &:= 0.4 \\ e_4 &:= 0.4 & e_5 &:= 0.3 & e_6 &:= 0.2 & e_7 &:= 0.1 \end{aligned}$$

Граничне значення ефективності системи $E_{lim} := 0.65$

Значення імовірності для гама-відсоткового ресурсу $\gamma := 0.8$

РОЗРАХУНОК

Кількість ітерацій методу Монте-Карло $N := 10000$ $i := 1..N$
Кількість зрізів часу $K := 1001$

Моделювання моментів відмов елементів

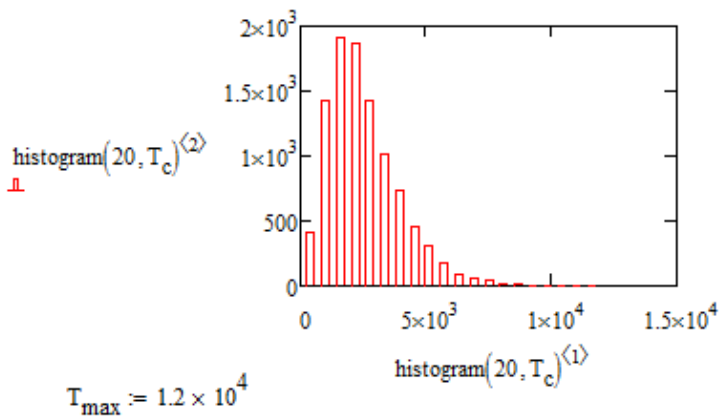
$$\begin{aligned} t_1 &:= \text{rexp}(N, \lambda_1) & t_2 &:= \text{rexp}(N, \lambda_2) & t_3 &:= \text{rexp}(N, \lambda_3) \\ t_4 &:= \text{rexp}(N, \lambda_4) & t_5 &:= \text{rexp}(N, \lambda_5) & t_6 &:= \text{rexp}(N, \lambda_6) & t_7 &:= \text{rexp}(N, \lambda_7) \end{aligned}$$

Визначення максимального часу роботи системи

$$T_{C_i} := \min(\max(t_{1_i}, t_{2_i}, t_{3_i}), \max(t_{4_i}, t_{5_i}, t_{6_i}, t_{7_i}))$$

$$\min(T_C) = 112.171$$

$$\max(T_C) = 1.194 \times 10^4$$



	1
1	$7.854 \cdot 10^3$
2	$3.841 \cdot 10^3$
3	785.361
4	$3.669 \cdot 10^3$
5	$1.812 \cdot 10^3$
6	$4.036 \cdot 10^3$
7	$2.069 \cdot 10^3$
8	$1.701 \cdot 10^3$
9	$1.48 \cdot 10^3$
10	$4.297 \cdot 10^3$
11	$2.534 \cdot 10^3$
12	$1.632 \cdot 10^3$
13	$3.231 \cdot 10^3$
14	902.49
15	$1.595 \cdot 10^3$
16	...

Рисунок 10 – Визначити показники довговічності ТС тривалого функціонування з урахуванням ефективності

Визначення часових зрізів

$k := 1..1001$

$$T_{sp_k} := (k - 1) \cdot \frac{T_{max}}{K - 1}$$

Визначення ефективності елементів для зрізів часу, що розглядаються

$$E_{1,i,k} := \begin{cases} e_1 & \text{if } T_{sp_k} < t_{1_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad E_{2,i,k} := \begin{cases} e_2 & \text{if } T_{sp_k} < t_{2_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad E_{3,i,k} := \begin{cases} e_3 & \text{if } T_{sp_k} < t_{3_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_{4,i,k} := \begin{cases} e_4 & \text{if } T_{sp_k} < t_{4_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad E_{5,i,k} := \begin{cases} e_5 & \text{if } T_{sp_k} < t_{5_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_{6,i,k} := \begin{cases} e_6 & \text{if } T_{sp_k} < t_{6_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad E_{7,i,k} := \begin{cases} e_7 & \text{if } T_{sp_k} < t_{7_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_1 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
5	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
8	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
9	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
10	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
11	0.3	0.3	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
13	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
14	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
15	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
16	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	...

Визначення ефективності системи для зрізів часу

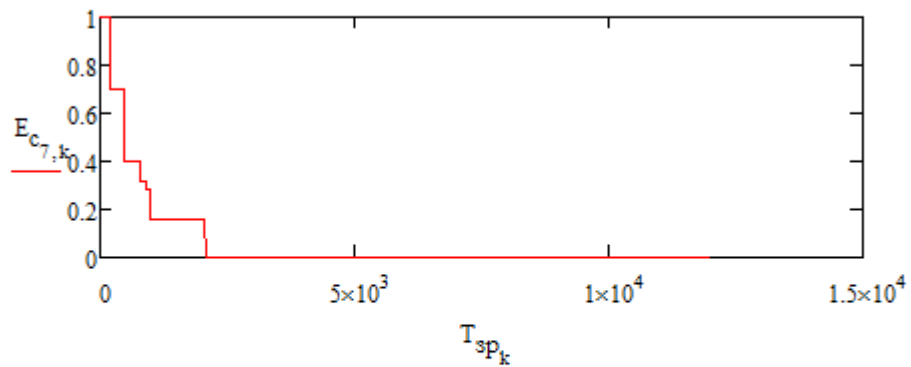
$$E_{c,i,k} := (E_{1,i,k} + E_{2,i,k} + E_{3,i,k}) \cdot (E_{4,i,k} + E_{5,i,k} + E_{6,i,k} + E_{7,i,k})$$

$$E_c =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9	0.9
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	0.7	0.7
10	1	1	1	1	1	1	1	1	0.7	0.7
11	1	1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.42	0.42	0.42
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	0.7	0.7	0.7
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	0.6	0.6	0.6	...

Рисунок 10 – Визначити показники довговічності ТС тривалого функціонування з урахуванням ефективності(продовження)

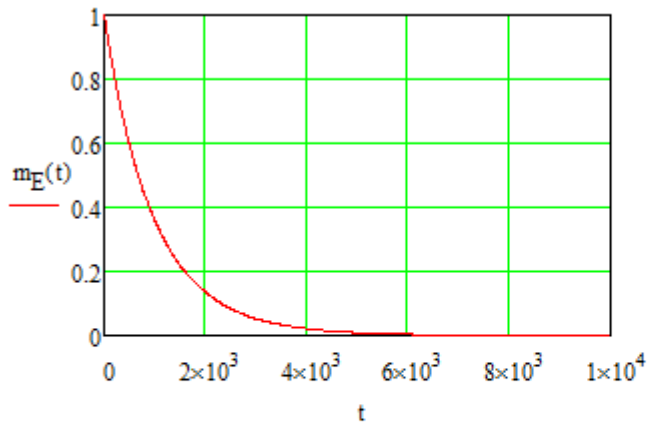
Траєкторія процесу зміни ефективності системи



Середня ефективність за зрізами часу

$$M_{E_k} := \text{mean}(E_c^{(k)})$$

$$m_E(t) := \text{linterp}(T_{zp}, M_E, t)$$



$M_E =$

	1
1	1
2	0.986
3	0.975
4	0.962
5	0.95
6	0.939
7	0.927
8	0.917
9	0.905
10	0.895
11	0.884
12	0.872
13	0.861
14	0.851
15	0.839
16	...

Середній ресурс роботи системи

$$u := 500$$

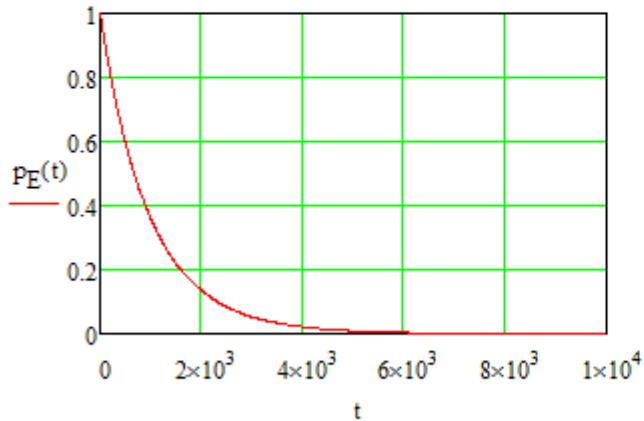
$$\text{root}(m_E(u) - E_{\text{lim}}, u) = 417.073$$

Рисунок 10 – Визначити показники довговічності ТС тривалого функціонування з урахуванням ефективності(продовження)

Імовірність того, що ефективність перевищує граничний рівень (для зрізів часу)

$$P_{E_k} := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N E_{c_{i,k}}$$

$$p_E(t) := \text{linterp}(T_{зр}, P_E, t)$$



	1
1	1
2	0.986
3	0.975
4	0.962
5	0.95
6	0.939
7	0.927
8	0.917
9	0.905
10	0.895
11	0.884
12	0.872
13	0.861
14	0.851
15	0.839
16	...

Гама-відсотковий ресурс з урахуванням ефективності

$$\text{root}(p_E(u) - \gamma, u) = 214.494$$

Рисунок 10 – Визначити показники довговічності ТС тривалого функціонування з урахуванням ефективності(продовження)

Задача 7. Розподілити показник надійності КА на його складові (підсистеми) з урахуванням ефективності функціонування (задано граничне значення ефективності E_* , нижче якого КА не може виконувати своє функціональне призначення). Нормування надійності виконати для двох варіантів:

- задано середній термін активного існування КА (\bar{T}_{KA});
- задано гама-відсотковий термін активного існування КА ($T_{KA\gamma}$).

Середній термін активного існування КА – це тривалість функціонування КА, протягом якого математичне сподівання ефективності функціонування $m_E(t)$ перевищує граничне значення E_* . Зв'язок між \bar{T}_{KA} і E_*

$$m_E(\bar{T}_c) = E_*.$$

Гама-відсотковий термін активного існування КА - це термін функціонування КА протягом якого ефективний рівень роботи КА перевищує граничний рівень E_* з імовірністю γ . Зв'язок між $T_{KA\gamma}$ і E_*

$$\Pr\{E(T_{KA\gamma}) \geq E_*\} = \gamma \cdot 0.01.$$

Структурну схему надійності КА представимо у наступному вигляді (рисунок 11). Така схема відображає сучасну концепцію побудови КА. В ній виділено дві основні складові частини КА: блок цільових систем (payload subsystems), це підсистеми КА, які визначають його функціональне призначення

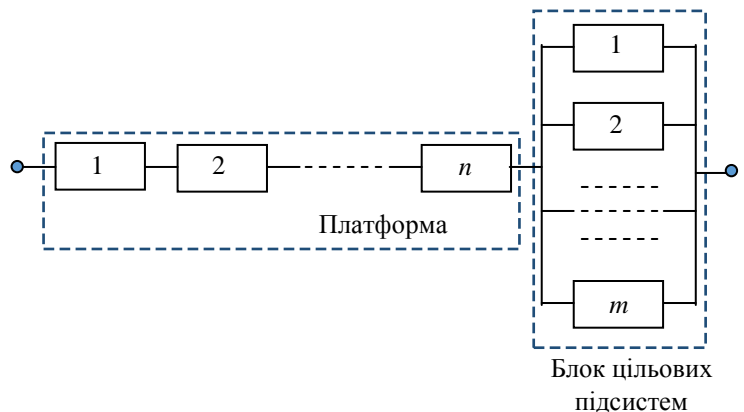


Рисунок 11 – ССН КА

(m – кількість цільових підсистем) і платформа – сукупність обслуговуючих підсистем (serving subsystems), що забезпечують функціонування цільових систем і космічного апарата в цілому (n – кількість підсистем платформи).

Будемо розглядати ефективність КА як відносну величину, що приймає значення із інтервалу $[0,1]$. Ефективність КА дорівнює одиниці у випадку, коли всі підсистеми КА у працездатному стані. У відповідності до типу з'єднання складових підсистем в ССН ефективність функціонування КА визначається за формулою:

$$E_{KA} = \prod_{i=1}^n E_{SS_i} \left(\sum_{j=1}^m E_{PS_j} \right),$$

де E_{SS_i} ($i = \overline{1, n}$), E_{PS_j} ($j = \overline{1, m}$) – ефективності підсистем платформи і блоку цільових систем (тобто їх внесок у загальну ефективність КА) відповідно.

$\sum_{j=1}^m E_{PS_j} \leq 1$ дорівнює 1 у випадку, коли всі цільові підсистеми працездатні.

Значення показників E_{SS_i} , E_{PS_j} залежать від того, в якому стані перебуває відповідна підсистема (в працездатному стані або в стані відмови). При цьому у момент $t=0$ (коли всі підсистеми перебувають у працездатному стані) ефективність становить $E_{KA}(t=0) = 1$. Зрозуміло, що в процесі функціонування КА ефективність КА буде знижуватися за рахунок відмов підсистем.

Зробимо наступні припущення. Для підсистем платформи ефективності дорівнюють

$$E_{SS_i} = \begin{cases} e_{SS_i}^{(n)} = 1 \\ e_{SS_i}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

де $e_{SS_i}^{(n)}$, $e_{SS_i}^{(e)}$ – ефективності i -тої підсистеми платформи у випадку її працездатного стану та у випадку її відмови.

Для цільових підсистем ефективності

$$E_{PS_j} = \begin{cases} e_{PS_j}^{(n)} = \frac{1}{m} \\ e_{PS_j}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad j = \overline{1, m}$$

де за аналогією $e_{PS_j}^{(n)}$, $e_{PS_j}^{(e)}$ – ефективність j -тої цільової підсистеми у випадку її працездатного стану та у випадку її відмови.

Крім того, будемо вважати, що всі підсистеми платформи мають одну і ту ж надійність, яка дорівнює $P_{SS_i}(t) = P_1(t)$ для $i = \overline{1, n}$, а всі цільові підсистеми відповідно $P_{PS_j}(t) = P_2(t)$ ($j = \overline{1, m}$).

Розглянемо перший випадок, коли задано середній термін активного існування КА (\bar{T}_{KA}). Будемо використовувати метод станів і визначимо математичне сподівання ефективності функціонування КА для певного моменту часу t . Виходячи із загальної формули для ефективності КА, зрозуміло, що у випадку відмови хоча б однієї із підсистем платформи ефективність КА дорівнюватиме нулю, тобто відмінна від нуля ефективність для КА буде лише у випадках, коли всі підсистеми платформи у працездатному стані. Зниження ефективності КА будемо мати за рахунок відмов цільових підсистем. Запишемо рівні ефективності КА і відповідні їм ймовірності, виходячи з відмов цільових підсистем

$$E_{KA}(t) = 1 - \frac{k}{m} - P(t) = C_m^k (P_2(t))^{m-k} (1 - P_2(t))^k \cdot (P_1(t))^n \quad \text{для } k=0,1,2,\dots,m$$

Зрозуміло, що у випадку $k = m$ ефективність КА знизиться до нуля. Отже, для математичного сподівання напишемо

$$m_E(t) = \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(t))^{m-k} (1 - P_2(t))^k (P_1(t))^n.$$

Для моменту \bar{T}_{KA} відповідно маємо

$$m_E(\bar{T}_{KA}) = \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(\bar{T}_{KA}))^{m-k} (1 - P_2(\bar{T}_{KA}))^k (P_1(\bar{T}_{KA}))^n = E_*.$$

Останнє співвідношення пов'язує $P_1(t)$, $P_2(t)$ і E_* для моменту часу \bar{T}_{KA} . Виходячи із нього, отримуємо залежність $P_1(\bar{T}_{KA})$ від $P_2(\bar{T}_{KA})$

$$P_1(\bar{T}_{KA}) = \left(\frac{E_*}{\sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(\bar{T}_{KA}))^{m-k} (1 - P_2(\bar{T}_{KA}))^k} \right)^{1/n}.$$

Тобто ми отримали розподіл надійності між підсистемами КА для моменту часу \bar{T}_{KA}

Наприклад для $n = 5$; $m = 3$ маємо наступний криві залежності $P_1(\bar{T}_{KA}) = f(P_2(\bar{T}_{KA}))$ для $E_* = 0,6$; $0,7$; $0,8$.

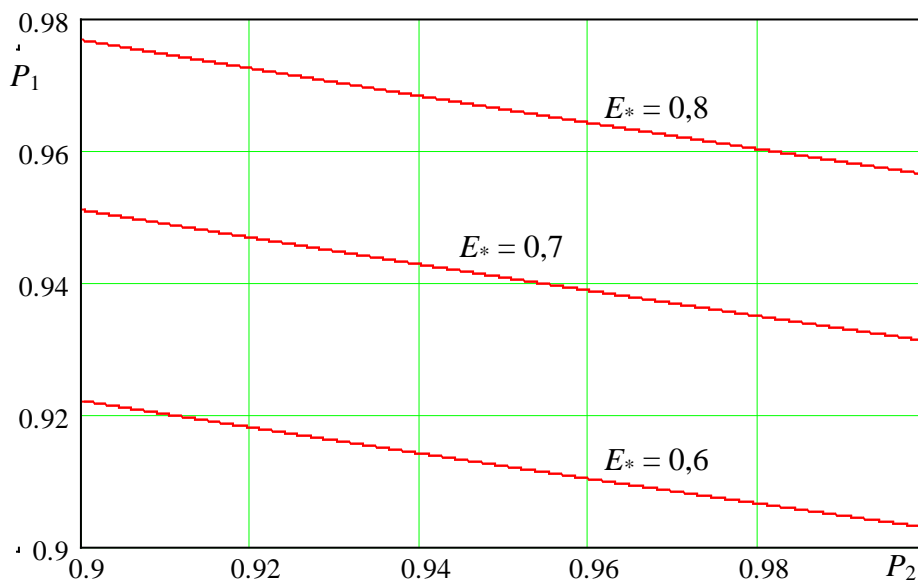


Рисунок 12 – Залежність $P_1 = f(P_2)$ для моменту часу \bar{T}_{KA}

Зокрема, у випадку рівнонадійності всіх підсистем КА $P_1(t) = P_2(t) = P(t)$ будемо мати наступне, більш просте, рівняння для визначення надійності підсистем

$$m_E(\bar{T}_{KA}) = \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P(\bar{T}_{KA}))^{m+n-k} (1 - P(\bar{T}_{KA}))^k = E^*.$$

В цьому рівнянні ліва частина являє собою поліном ступеня $n+m$ відносно невідомого P . Отже треба знайти рішення такого рівняння для відрізка $[0,1]$.

Розглянемо найбільш характерні ситуації щодо функціонування підсистем платформи КА і процедуру розподілу вимог до надійності в цих випадках.

Розглянемо найбільш характерні ситуації щодо функціонування підсистем платформи КА і процедури розподілу вимог до надійності в цих випадках.

Нехай одна із підсистем платформи КА (будемо умовно вважати, що її номер $i = 1$) у випадку відмови переходить до так званого спеціального чергового режиму, якому відповідає певний рівень ефективності $e_{SS_1}^{(e)} = e_{cp}$ ($0 < e_{cp} < 1$). Така ситуація є характерною, наприклад, для підсистеми орієнтації КА. У відповідності до цього матимемо наступне рівняння, що пов'язує $P_1(\bar{T}_{KA})$, $P_2(\bar{T}_{KA})$ і E^*

$$m_E(\bar{T}_{KA}) = \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(\bar{T}_{KA}))^{m-k} (1 - P_2(\bar{T}_{KA}))^k (P_1(\bar{T}_{KA}))^n + \\ + \sum_{k=0}^m e_{cp} \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(\bar{T}_{KA}))^{m-k} (1 - P_2(\bar{T}_{KA}))^k (P_1(\bar{T}_{KA}))^{n-1} (1 - P_1(\bar{T}_{KA})) = E^*$$

Наприклад для $n = 5$, $m = 3$ і $e_{cp} = 0,6$ маємо наступний криві залежності $P_1(\bar{T}_{KA}) = f(P_2(\bar{T}_{KA}))$ для $E^* = 0,6; 0,7; 0,8$.

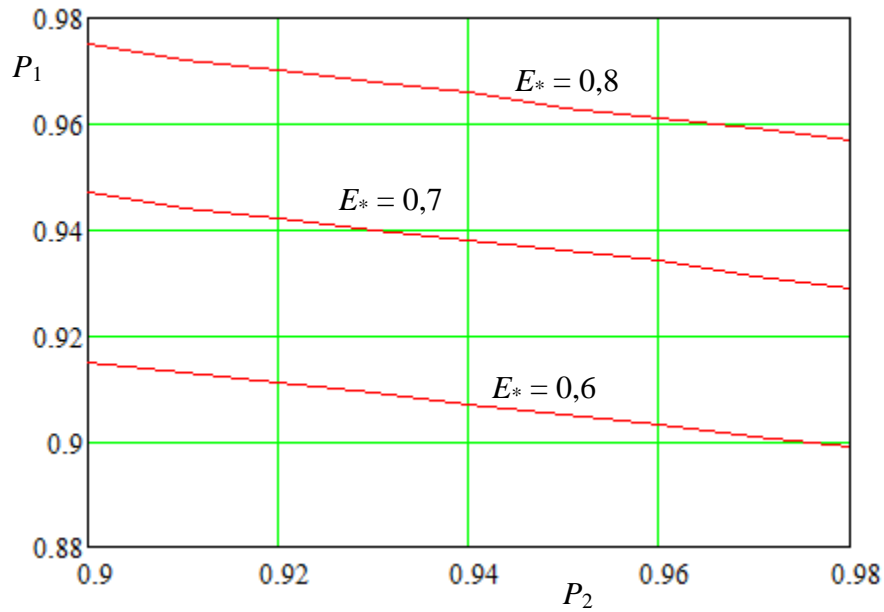


Рисунок 13 – Залежність $P_1 = f(P_2)$ для моменту часу \bar{T}_{KA}

Порівнюючи графіки на рисунках 12 і 13, видно, що перехід однієї із підсистем платформи у черговий режим у разі відмови, сприяє зниженню вимог до надійності, виходячи з потрібного рівня ефективності КА.

Тепер розглянемо випадок, коли одна із підсистем платформи (з умовним номером $i = 2$) для моменту \bar{T}_{KA} має знижений рівень ефективності, за рахунок деградації окремих компонентів під час функціонування в умовах космічного простору. Наприклад, процес деградації впливає на працездатність сонячних батарей КА – потужність яких з часом знижується. В цьому випадку для моменту \bar{T}_{KA} для цієї підсистеми платформи маємо

$$E_{SS_2} = \begin{cases} e_{SS_2}^{(n)} = e_\partial \\ e_{SS_2}^{(e)} = 0 \end{cases}$$

В такому випадку маємо наступне рівняння для визначення $P_1(\bar{T}_{KA})$ і $P_2(\bar{T}_{KA})$

$$\sum_{k=0}^m e_\partial \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(\bar{T}_{KA}))^{m-k} (1 - P_2(\bar{T}_{KA}))^k (P_1(\bar{T}_{KA}))^n + \\ + \sum_{k=0}^m e_\partial e_{cp} \left(1 - \frac{k}{m}\right) C_m^k (P_2(\bar{T}_{KA}))^{m-k} (1 - P_2(\bar{T}_{KA}))^k (P_1(\bar{T}_{KA}))^{n-1} (1 - P_1(\bar{T}_{KA})) = E_*$$

В найбільш загальному випадку, коли кожна з цільових систем має своє окреме значення ефективності $e_{PS_1}^{(n)} \neq e_{PS_2}^{(n)} \neq \dots \neq e_{PS_m}^{(n)}$ і $\sum_{j=1}^m E_{PS_j} \leq 1$, а також всі підсистеми платформи і блоку цільових підсистем мають свої у загальному

випадку не рівні імовірності безвідмовної роботи. В цьому випадку потрібно записати всі стани, для яких ефективність КА більша за нуль у вигляді матриці. (зокрема, враховуючи можливі переходи частини підсистем в черговий режим і зниження ефективності за рахунок деградації).

Тепер розглянемо випадок, коли задано гама-відсотковий термін активного існування КА. В цьому випадку

$$\sum_{k=0}^{k_*} P_2^{m-k} (1 - P_2)^k P_1^n = \gamma$$

де k_* - останнє k , для якого виконується умова $1 - \frac{k_*}{m} \geq E_*$

Виходячи з цієї формули можна записати

$$P_1 = \left(\frac{\gamma}{\sum_{k=0}^{k_*} P_2^{m-k} (1 - P_2)^k} \right)^{1/n}$$

У випадку $P_1(t) = P_2(t) = P(t)$

$$\sum_{k=0}^{k_*} P^{m+n-k} (1 - P)^k = \gamma$$

Задача 8. Спроектувати циліндричну оболонку (рис. 14) довжиною L і радіусом R з кільцевими ребрами (шпангоутами), що знаходиться під дією зовнішнього тиску p , мінімальної маси з урахуванням вимог до надійності ($P_{\text{потр}}$).

Параметри задачі (дивись рис. 15):

p – діючий на оболонку зовнішній тиск (розрахунковий);

L – довжина оболонки;

R – радіус оболонки;

δ_o – товщина оболонки (між ребрами);

h – висота ребра (шпангоуту);

$\delta_{ш}$ – товщина ребра (шпангоуту);

$l_{ш}$ – відстань між ребрами;

E – модуль пружності матеріалу оболонки;

ρ – густина матеріалу оболонки (вважається детермінованою величиною).

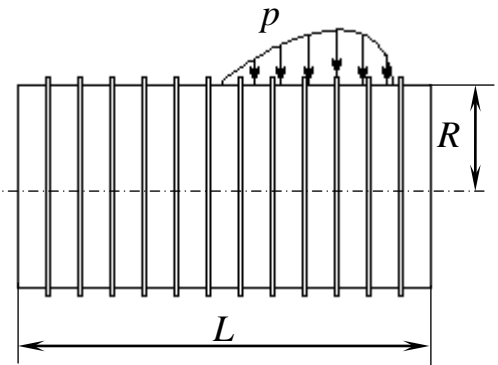


Рисунок 14 – Оболонка з кільцевими ребрами (шпангоутами)

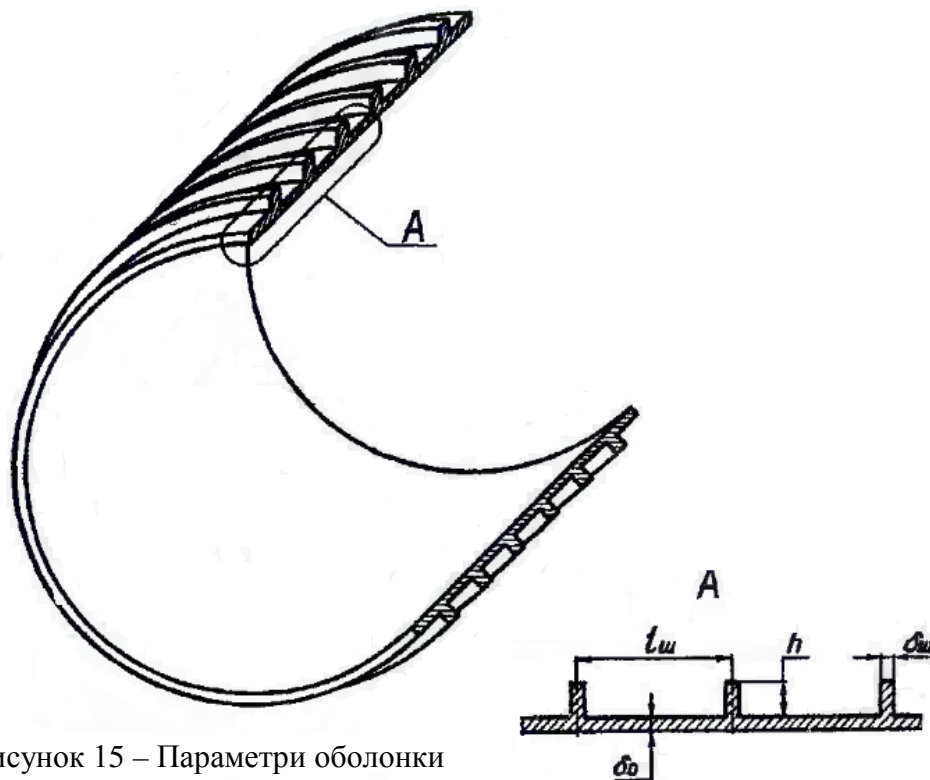


Рисунок 15 – Параметри оболонки

Цільова функція оптимізації – маса оболонки

$$M_{об} = 2\pi R [L\delta_o + n\delta_{ш}h]\rho \rightarrow \min,$$

де n – кількість ребер (шпангоутів), що визначається наступним чином

$$n = \left[\frac{L}{l_{ш}} + 0.5 \right],$$

[•] – функція цілої частини.

Умови працездатності оболонки:

1. Умова відсутності загальної втрати стійкості оболонки

$$p_{кр}^3 \geq p,$$

де $p_{кр}^3$ – критичний тиск загальної втрати стійкості.

Критичний тиск загальної втрати стійкості визначається за формулою

$$p_{кр}^3 = 4\alpha \frac{\pi R}{l_{ш}(n+1)} \left[\frac{KE\delta_o^3}{12(1-\mu^2)3R^3} \right]^{3/4} \left[\frac{E\delta_0}{R} \right]^{1/4},$$

де α – коефіцієнт, що враховує закріплення країв оболонки (приймаємо $\alpha = 1$); μ – коефіцієнт Пуассона ($\mu = 0.3$); K – коефіцієнт, що показує збільшення циліндричної жорсткості гладкої оболонки при застосуванні на ній шпангоутів, який визначається за формулою

$$K = 1 + EI_{ш} \frac{n+1}{L} \cdot \frac{12(1-\mu^2)}{E\delta_o^3}.$$

У формулі для $K I_{ш}$ – момент інерції частини оболонки зі шпангоутом, який визначається наступним чином

$$I_{ш} = \frac{\delta_{ш}h^3}{12} + \frac{l_{ш}\delta_o^3}{12} + \frac{0.25l_{ш}\delta_{ш}\delta_o h(h+\delta_o)^2}{\delta_{ш}h + \delta_o l_{ш}}.$$

2. Умова відсутності місцевої втрати стійкості оболонки між шпангоутами

$$p_{кр}^M \geq p,$$

де $p_{кр}^M$ – критичний тиск місцевої втрати стійкості оболонки між шпангоутами

$$p_{кр}^M = 4\alpha \frac{\pi R}{l_{ш}} \left[\frac{E\delta_o^3}{12(1-\mu^2)3R^3} \right]^{3/4} \left[\frac{E\delta_0}{R} \right]^{1/4}.$$

Керуючі параметри процесу оптимізації $\delta_o, h, \delta_{ш}, l_{ш}$.

Вихідні дані: $L = 1,1$ м; $R = 0,55$ м; $E = 6,8 \cdot 10^4$ МПа; $\rho = 2,64 \cdot 10^3$ кг/м³;
 $p = 0,35 \cdot 10$ МПа; $P_{потр} = 0,999$.

Дані щодо середніх квадратичних відхилень випадкових величин

$$\sigma_R = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \sigma_L = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \gamma_p = 0,15; \gamma_E = 0,07;$$

$$\sigma_{\delta_o} = \sigma_{\delta_{ш}} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \sigma_h = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \sigma_{l_{ш}} = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Технологічні обмеження:

$$\delta_o \geq 0,15 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\delta_{ш} \geq 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$l_{ш} \geq 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Шляхом оптимізації треба визначити математичні сподівання параметрів $m_{\delta_o}, m_{\delta_{ш}}, m_h, m_{l_{ш}}$.

Початкові дані процесу оптимізації:

$m_{\delta_o} = 3,0 \cdot 10^{-3}$ м; $m_{\delta_{uu}} = 5,0 \cdot 10^{-3}$ м; $m_h = 0,01$ м; $m_{l_{uu}} = 0,12$ м.

Результати процесу оптимізації:

$m_{\delta_o} = 2,3 \cdot 10^{-3}$ м; $m_{\delta_{uu}} = 3,0 \cdot 10^{-3}$ м; $m_h = 0,014$ м; $m_{l_{uu}} = 0,14$ м.

Маса оболонки – 31,5 кг.